

2 - ECOULEMENT 2D AUTOUR D'UN CYLINDRE.

1. Introduction.

On aborde en général la théorie de l'écoulement autour d'un profil d'aile en admettant qu'il est « bi-dimensionnel » ou "2D".

On repère l'espace avec trois axes de coordonnées Ox , Oy (perpendiculaire à Ox) et Oz (perpendiculaire au plan Oxy), l'axe Oz étant parallèle à l'envergure de l'aile.

Dire que l'écoulement est "2D" signifie que la vitesse est dans le plan Oxy et tout ce qui se passe dans un plan Oxy ne dépend pas de l'envergure z .

Il suffit donc d'examiner l'écoulement dans un plan Oxy quelconque perpendiculaire à l'envergure. Si on admet cette hypothèse, on suppose que l'aile est d'envergure infinie, elle n'a pas d'extrémités.

Il s'agit là d'une situation idéalisée qui simplifie d'une certaine manière l'approche théorique mais qui masque des réalités fondamentales comme la présence de tourbillons marginaux en les rejetant « à l'infini ».

On peut néanmoins admettre cette hypothèse loin des extrémités de l'aile.

Imaginons qu'un cylindre très long, de rayon R (m), d'axe parallèle à Oz passant par O , soit plongé dans l'écoulement uniforme dont la vitesse est parallèle à la direction Ox de grandeur U_∞ (m/s) dirigée de la gauche vers la droite. C'est une aile un peu spéciale, mais dans l'hypothèse de non-viscosité, « ça colle », c'est le cas de le dire.

Ce cylindre découpe un cercle de rayon R dans n'importe quel plan Oxy .

Un point M quelconque de ce cercle est à la distance R de l'origine O . On peut repérer un point M du plan Oxy par le vecteur \mathbf{OM} , ou par ses coordonnées cartésiennes (x, y) qui sont les composantes de \mathbf{OM} sur les axes Ox et Oy , ou encore par ses coordonnées polaires : r et θ . θ est l'angle de \mathbf{OM} avec l'axe Ox et r est la distance OM .

On a :

$$x = r \cdot \cos(\theta) \text{ et } y = r \cdot \sin(\theta) .$$

NOTATION :

On note en **gras** les vecteurs.

Un angle θ est compté positif si la rotation est dans le sens anti-horaire. C'est le sens trigonométrique habituel.

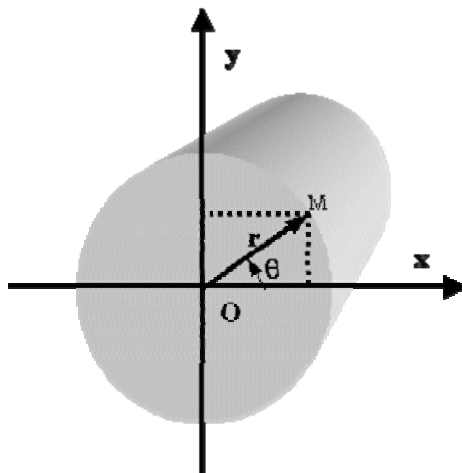


Figure 2.1 : Cylindre et système de coordonnées (x, y) ou (r, θ) .

2. Champ de vitesse.

En l'absence de cylindre la vitesse a pour composantes $u = U_\infty$ et $v = 0$.
 La présence du cylindre modifie l'écoulement car il doit contourner le cylindre.
 La vitesse est un vecteur \mathbf{v} dont les composantes u sur Ox et v sur Oy sont :

$$u(r, \theta) = U_\infty \{1 - [\cos(2\theta)].(R/r)^2\} \text{ et } v(r, \theta) = - U_\infty.[\sin(2\theta)].(R/r)^2 \quad (1)$$

Sur le cylindre $r = R$ les composantes de la vitesse sont :

$$u = U_\infty. \{1 - [\cos(2\theta)]\} \text{ et } v = - U_\infty.\sin(2\theta) \quad (2)$$

En faisant le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{OM} = x.u + y.v$ on trouve :
 $\cos(\theta).[1 - \cos(2\theta)] - \sin(\theta).\sin(2\theta) = 0$.

Sur le cylindre $r = R$, la vitesse \mathbf{v} est ainsi toujours perpendiculaire à n'importe quel rayon \mathbf{OM} . La vitesse \mathbf{v} est donc tangente au cylindre et cet écoulement contourne bien l'obstacle cylindrique.

On peut calculer la grandeur (on dit le module) du vecteur \mathbf{v} sur le cylindre.
 $|\mathbf{v}|^2 = (u^2 + v^2) = 2 \cdot U_\infty^2.[1 - \cos(2\theta)] = 4.U_\infty^2.\sin^2(\theta)$

ou encore :

$$|\mathbf{v}| = 2 U_\infty |\sin(\theta)| \quad (3)$$

où $||$ signifie « valeur absolue » est toujours positif ou nul : $|f|$ est égal à la valeur de la fonction f si f est positif et à $-f$ si f est négatif.

Examinons quelques points particuliers situés sur le cylindre :

- Point d'arrêt amont « Am » :

Le point le plus à l'amont est en $x = -R$, $y = 0$. On a $\theta = 180^\circ$ et donc $\sin(\theta) = 0$ d'où $|\mathbf{v}| = 0$.
 La vitesse est nulle et on appelle ce point « point d'arrêt amont ».

- Point d'arrêt aval Av :

Le point le plus à l'aval est en $x = R$, $y = 0$. On a $\theta = 0^\circ$ et $\sin(\theta) = 0$ d'où $|\mathbf{v}| = 0$.
 La vitesse est nulle et on appelle ce point « point d'arrêt aval ».

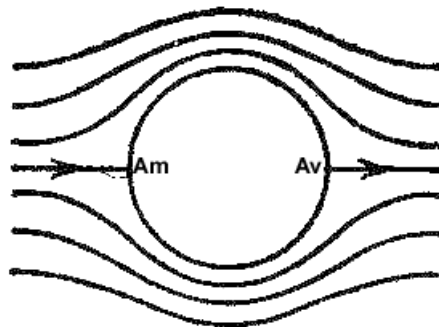


Figure 2.2 : Ecoulement symétrique autour d'un cylindre.

De plus, comme $|\sin(\theta)|$ a la même valeur pour un angle θ et $-\theta$, on en déduit que la vitesse a la même grandeur en des points symétriques par rapport à l'axe Ox.

Si on change θ en $(\pi - \theta)$, le point M du cercle devient un point M' symétrique par rapport à l'axe Oy.

Comme $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$ on en déduit que la grandeur de v est la même pour des points M et M' du cylindre symétriques par rapport à l'axe vertical Oy.

Pour le point supérieur (et inférieur) du cylindre, $\theta = \pi/2$ (et $-\pi/2$) soit 90° (et -90°) et $|\sin(\theta)| = 1$.

En ce points le plus haut (ou le plus bas) du cercle on a $|v| = 2.U_\infty$

Sur les points supérieur et inférieur on a donc une vitesse double de la vitesse « infini amont ».

3. Pression sur la paroi du cylindre. Portance.

Voyons maintenant la pression autour du cylindre en appliquant le théorème de Bernoulli. Le théorème de Bernoulli est valide pour un écoulement incompressible stationnaire (indépendant du temps).

Dans le cas général (chapitre 4) c'est la relation de Cauchy-Lagrange qui relie la vitesse, le potentiel, la masse volumique et la pression.

Si très loin du cylindre on a une vitesse de $|v_\infty| = U_\infty$ (m/s) et la pression atmosphérique normale p_0 (1013 hPa), en n'importe quel point M(x, y) ou M (r, θ) on a une pression $p(x, y)$ telle que :

$$p(x, y) + 1/2 \cdot \rho \cdot |v|^2 = p_0 + 1/2 \cdot \rho \cdot |v_\infty|^2$$

ou :

$$p(x, y) - p_0 = 1/2 \cdot \rho \cdot (|v_\infty|^2 - |v|^2). \quad (4)$$

Notons au passage que la pression en un point d'arrêt (appelée pression d'arrêt ou pression totale) qui est caractérisé par $|v| = 0$ est :

$$p = p_0 + 1/2 \cdot \rho \cdot |v_\infty|^2.$$

On note que la pression ambiante p_0 (appelée pression statique) peut être mesurée en un point de l'obstacle ou la vitesse est égale à $|v_\infty|$.

La différence entre ces deux pressions (appelée pression dynamique) est égale à $1/2 \cdot \rho \cdot |v_\infty|^2$. C'est sur ce principe que fonctionne le tube de Pitot qui permet la mesure de la vitesse d'un avion.

On définit le **coefficient de pression** C_p qui permet de s'affranchir des conditions « à l'infini » ρ et $|v_\infty|$:

$$C_p = [p(x, y) - p_0] / [1/2 \cdot \rho \cdot |v_\infty|^2]$$

Soit :

$$C_p = 1 - |\mathbf{v}|^2 / |\mathbf{v}_\infty|^2 \quad (5)$$

Si C_p est nul, la pression au point M est la même que p_0 très loin du cylindre, si C_p est négatif, la pression est inférieure à p_0 , on est dans une région de dépression. Si C_p est positif on est dans une zone de surpression.

En remplaçant $|\mathbf{v}|$ par son expression donnée par l'équation (3) et $|\mathbf{v}_\infty|$ par sa valeur U_∞ , on trouve le coefficient de pression pour des points M situés sur le cylindre :

$$C_p(\theta) = 1 - 4 \sin^2(\theta) \quad (6)$$

Pour $\theta = 180^\circ$ ou 0° (points d'arrêt amont et aval) $\sin(\theta) = 0$ et $C_p = 1$, on est dans une zone de surpression. Pour $\theta = 90^\circ$ (ou -90°) $\sin^2(\theta) = 1$ et $C_p = -3$, on est dans une zone de forte dépression.

Mais comme on a vu que la grandeur de la vitesse est la même en des points du cylindre symétriques par rapport aux axes OX et OY, la surpression aux points d'arrêt amont et aval se compensent, de même que les dépressions en haut et en bas du cylindre.

La force totale exercée par l'écoulement sur le cylindre est nulle : il n'y a pas de portance ni de traînée.

On trouve cette absence de traînée pour tous les écoulements "2D" à potentiel de vitesse (fluide parfait non visqueux incompressible) stationnaires (où le temps n'intervient pas).

C'est le paradoxe de d'Alembert (1717-1783).

Pour calculer exactement la force exercée par l'écoulement sur le cylindre, il faut intégrer les forces locales de pression qui s'exercent perpendiculairement à la surface locale du cylindre.

En notant $\mathbf{n}(x, y)$ le vecteur unitaire normal à la surface au cylindre au point M(x, y) ou M(θ) (orienté vers l'intérieur du cylindre) on a pour ses composantes de \mathbf{n} sur Ox et Oy :

$$n_x = -\cos(\theta), \quad n_y = -\sin(\theta).$$

Un élément du cercle de rayon R autour du point M a pour longueur $R.d\theta$.

Si on prend une tranche de cylindre d'envergure A, l'élément de surface à considérer est $dS = A.R.d\theta$.

La force de pression exercée sur cet élément de surface aura pour composantes :

Sur Ox

$$dF_x(\theta) = n_x(\theta).p(\theta).dS = -\cos(\theta).p(\theta).A.R.d\theta = -(\theta).[p_0 + 1/2.\rho.(|\mathbf{v}_\infty|^2 - |\mathbf{v}|^2)].A.R.d\theta.$$

et sur Oy

$$dF_y(\theta) = n_y(\theta).p(\theta).dS = -\sin(\theta).p(\theta).A.R.d\theta = -\sin(\theta).[p_0 + 1/2.\rho.(|\mathbf{v}_\infty|^2 - |\mathbf{v}|^2)].A.R.d\theta.$$

En introduisant le coefficient de pression C_p (équation (5) ci dessus) ces expressions deviennent :

$$dF_x(\theta) = -1/2.\rho.|\mathbf{v}_\infty|^2.A.\cos(\theta).C_p(\theta).R.d\theta.$$

et

$$dF_y(\theta) = -1/2.\rho.|\mathbf{v}_\infty|^2.A.\sin(\theta).C_p(\theta).R.d\theta.$$

En remplaçant $C_p(\theta)$ par sa valeur donnée par (6) on obtient :

$$dF_x(\theta) = -1/2 \cdot \rho \cdot |\mathbf{v}_\infty|^2 \cdot A \cdot R \cdot \cos(\theta) \cdot [1 - 4 \sin^2(\theta)] \cdot d\theta.$$

et

$$dF_y(\theta) = -1/2 \cdot \rho \cdot |\mathbf{v}_\infty|^2 \cdot A \cdot R \cdot \sin(\theta) \cdot [1 - 4 \sin^2(\theta)] \cdot d\theta.$$

La force totale sera l'intégrale de cette force élémentaire sur toute la surface (sur tout le cercle) c'est à dire pour θ variant de -180° ($-\pi$ radians) à 180° (π radians).

La portance est la composante de la force subie par le corps perpendiculaire à la direction de la vitesse infini amont.

La traînée est la composante de la force subie par le corps parallèle à la direction de la vitesse infini amont.

Du fait des symétries des fonctions $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ on trouve une intégrale nulle donc la portance F_y et la traînée F_x sont nulles.

Comment produire de la portance sur un cylindre placé dans un écoulement ?

Il faut rompre cette symétrie de la vitesse entre le haut et le bas du cylindre tout en gardant une vitesse tangente au cylindre puisque les particules de fluide ne peuvent traverser la paroi.

4. Addition d'un tourbillon. Création de portance.

On peut créer de la portance en ajoutant la vitesse produite par un **tourbillon** placé sur l'axe du cylindre. La manière d'établir ce tourbillon dans un écoulement réel sera examinée plus loin.

En effet un tourbillon isolé d'intensité Γ produit une vitesse « tangentielle » $\mathbf{v}_\Gamma(r, \theta)$ en un point $M(r, \theta)$ dont les composantes sur Ox et Oy sont :

$$\begin{aligned} u_\Gamma(r, \theta) &= \Gamma \cdot \sin(\theta) / (2\pi \cdot r) \\ v_\Gamma(r, \theta) &= -\Gamma \cdot \cos(\theta) / (2\pi \cdot r) \end{aligned} \quad (7)$$

(Les signes +/- ont été choisis afin qu'un tourbillon Γ positif donne une vitesse dans le sens horaire.

On note que u et v (vitesse) étant en m/s et r (distance) en m, l'intensité Γ d'un tourbillon se mesure en m^2/s .

En faisant le produit scalaire de $\mathbf{v}_\Gamma(r, \theta)$ avec $\mathbf{OM}(r, \theta)$ on trouve 0 donc \mathbf{OM} (un rayon du cercle) et \mathbf{v}_Γ sont bien perpendiculaires. Le tourbillon Γ produit une vitesse purement tangentielle.

En ajoutant la vitesse du tourbillon à la vitesse donnée par (1) on trouve la vitesse en n'importe quel point $M(r, \theta)$ du plan Oxy :

$$u(r, \theta) = U_\infty \cdot \{1 - [\cos(2\theta)] \cdot (R/r)^2\} + \Gamma \cdot \sin(\theta) / (2\pi \cdot r) \quad (8)$$

$$v(r, \theta) = -U_\infty \cdot [\sin(2\theta)] \cdot (R/r)^2 - \Gamma \cdot \cos(\theta) / (2\pi \cdot r)$$

Pour n'importe quel point du cylindre ($r = R$), en notant pour simplifier $\gamma = \Gamma/(2\pi.U_\infty.R)$, la vitesse est :

$$u = U_\infty \cdot \{1 - [\cos(2\theta)] + \gamma \cdot \sin(\theta)\} = U_\infty \cdot \sin(\theta) \cdot [2 \cdot \sin(\theta) + \gamma]$$

et

$$v = -U_\infty \cdot \{[\sin(2\theta)] - \gamma \cdot \cos(\theta)\} = U_\infty \cdot \cos(\theta) \cdot [2 \cdot \sin(\theta) + \gamma].$$

Le carré du module de la vitesse est maintenant :

$$|\mathbf{v}|^2 = u^2 + v^2 = U_\infty^2 \cdot [2 \cdot \sin(\theta) + \gamma]^2$$

et la vitesse tangentielle au cylindre est donc :

$$|\mathbf{v}| = U_\infty \cdot |2 \cdot \sin(\theta) + \gamma|$$

à comparer avec (3) s'il n'y a pas de tourbillon Γ .

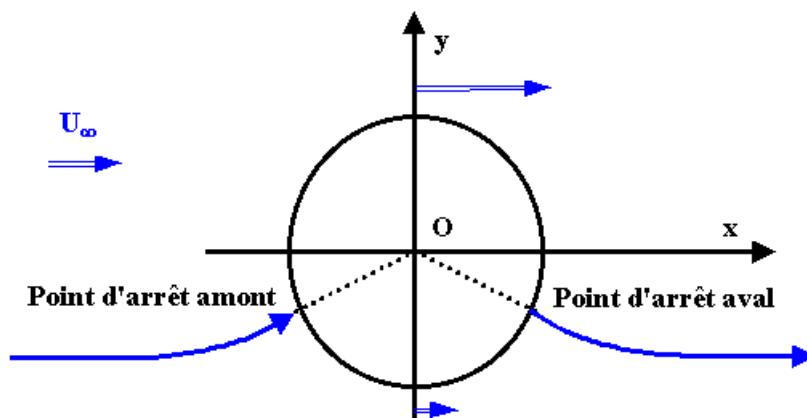


Figure 2.3 : Ecoulement autour d'un cylindre avec "tourbillon".

Les points d'arrêt amont et aval ne sont plus les points du cercle placés sur l'axe Ox ($\theta = 0$ et $\theta = 180^\circ$) mais des points situés de telle manière que $\sin(\theta) = -\gamma/2 = -\Gamma/(2\pi.U_\infty.R)$.

Si par exemple $\gamma = 1$, $\Gamma = 2\pi.U_\infty.R = 6.28.U_\infty.R$ (m^2/s) on a pour les points d'arrêt $\sin(\theta) = -1/2$ c'est à dire $\theta = -30^\circ$ et $\theta = -150^\circ$.

La figure 2.3 montre les lignes de courant autour du cylindre pour différentes intensités du tourbillon axial Γ (ou γ)

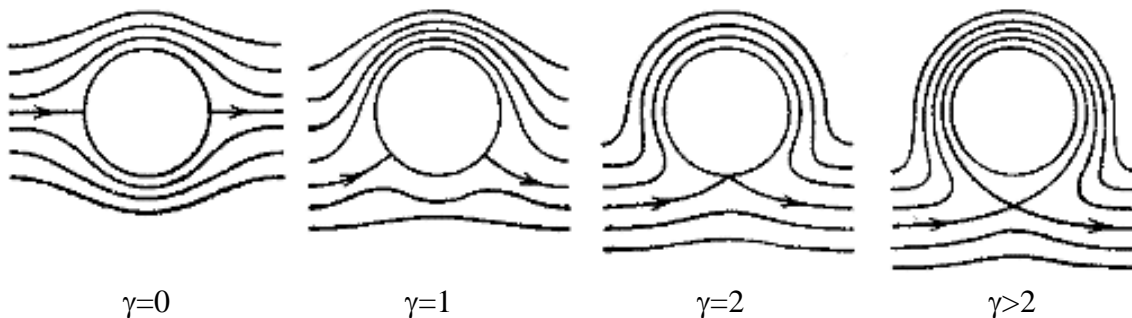


Figure 2.3 : Ecoulement autour de cylindre avec différente valeur du "tourbillon γ ".

$$(\gamma = \Gamma/(2\pi.U_\infty.R)).$$

(extrait de "Effets hydrodynamiques et modèles mathématiques", M.LAVRENTIEV et B.CHABAT, éditions MIR, Moscou 1980.).

Les vitesses ne sont plus les mêmes au-dessus (extrados) et au-dessous (intrados) du cylindre. Le coefficient de pression donné par l'équation (5) est maintenant :

$$C_p(\theta) = 1 - [2 \cdot \sin(\theta) + \gamma]^2 \quad (9)$$

La force élémentaire $d\mathbf{F}$ agissant sur un élément de surface de cylindre d'envergure A et de longueur $R \cdot d\theta$ entourant un point $M(\theta)$ du cylindre a pour composantes sur Ox et Oy :

$$dF_x(\theta) = -1/2 \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \cdot A \cdot \cos(\theta) \cdot \{1 - [2 \cdot \sin(\theta) + \gamma]^2\} \cdot R \cdot d\theta$$

$$dF_y(\theta) = -1/2 \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \cdot A \cdot \sin(\theta) \cdot \{1 - [2 \cdot \sin(\theta) + \gamma]^2\} \cdot R \cdot d\theta$$

Par définition la portance est la composante perpendiculaire au vent relatif U_∞ de la force exercée par l'air sur le corps, la traînée étant la composante parallèle.

Pour calculer la force subie par le cylindre il faut intégrer ces éléments de force sur tout le cercle c'est à dire de $\theta = -180^\circ$ ($-\pi$ radian) à 180° (π radian).

On trouve que $F_x = 0$. La traînée est nulle (paradoxe de d'Alembert).

La force verticale (perpendiculaire à \mathbf{v}_∞) est la portance :

$$F_y = 1/2 \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \cdot A \cdot R \cdot (4 \cdot \pi \cdot \gamma) = \rho \cdot U_\infty \cdot A \cdot \Gamma \quad (10)$$

La portance est proportionnelle à la vitesse « infini amont » U_∞ et à l'intensité Γ du tourbillon.

On définit le **coefficient de portance** C_L (« L » pour lift en anglais) en divisant la portance F_y par la pression dynamique $1/2 \cdot \rho \cdot U_\infty^2$ et une surface caractéristique de l'aile à savoir sa corde multipliée par son envergure, ici la corde = $2 \cdot R$ (rayon du cylindre R) et l'envergure = A .

On a donc :

$$C_L = F_y / (1/2 \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \cdot A \cdot 2 \cdot R) = 2 \cdot \pi \cdot \gamma$$

$$\text{avec } \gamma = \Gamma / (2 \pi \cdot U_\infty \cdot R) \quad (11)$$

Dans notre exemple $\gamma = 1$ et donc $C_L = 6.28$.

Cette valeur élevée de C_L est directement liée au déplacement des points d'arrêt amont et aval de 30° vers le bas causé par la vitesse induite par le tourbillon.

5. Déviation de l'écoulement à grande distance.

En présence de tourbillon, les composantes de la vitesse en un point M quelconque de coordonnées $x = r \cdot \cos(\theta)$ et $y = r \cdot \sin(\theta)$ est donnée par les équations (8) réécrites ci-dessous :

$$u(r, \theta) = U_\infty \cdot \{1 - [\cos(2\theta)] \cdot (R/r)^2\} + \Gamma \cdot \sin(\theta) / (2 \pi \cdot r) \quad (12)$$

$$v(r, \theta) = -U_{\infty} [\sin(2\theta)] (R/r)^2 - \Gamma \cos(\theta) / (2\pi r)$$

A grande distance du cylindre, la contribution du terme proportionnel à $1/r^2$ (dipôle) est négligeable devant la contribution du tourbillon proportionnelle à $1/r$.

Pour la composante horizontale u , cette contribution du tourbillon est négligeable devant la vitesse « infini amont ».

On peut donc écrire loin du cylindre :

$$u(r, \theta) = U_{\infty}$$

$$v(r, \theta) = -\Gamma \cos(\theta) / (2\pi r)$$

A l'amont du cylindre, θ est compris entre 180° et 90° au-dessus du cylindre, -180° et -90° en dessous. $\cos(\theta)$ est donc négatif et v positif.

L'air est dévié vers le haut à l'amont du cylindre.

A l'aval du cylindre θ , est compris entre -90° et 90° .

$\cos(\theta)$ est donc positif et v est négatif.

L'air est dévié vers le bas à l'aval du cylindre.

Cette déviation est d'autant plus faible qu'on est loin du cylindre mais elle concerne tout le fluide. Elle est proportionnelle à Γ c'est à dire à la portance.

Calculons la variation de la composante verticale M_y (parallèle à Oy) de la quantité de mouvement de l'air traversant un plan vertical situé à l'amont à $x = -L$ et à l'aval à $x = L$, L étant grand par rapport au rayon du cylindre R .

Pour un élément de plan vertical de hauteur dy centré sur un point $M(r, \theta)$ et d'envergure A (dans la direction Oz), on a un élément de surface $A \cdot dy$. La composante verticale de la quantité de mouvement du fluide traversant cette surface est :

$$dM_y = \rho \cdot u \cdot v = -\rho \cdot U_{\infty} \cdot \Gamma \cdot \cos(\theta) / (2\pi r) \cdot A \cdot dy$$

ou encore :

$$dM_y = \rho \cdot u \cdot v = -1/(2\pi) \cdot \rho \cdot U_{\infty} \cdot \Gamma \cdot A \cdot [\cos(\theta)/r] \cdot dy$$

L'élément de plan $A \cdot dy$ est situé à une abscisse $x = r \cdot \cos(\theta)$ (égale à $-L$ ou $+L$) et à une ordonnée $y = r \cdot \sin(\theta)$.

En exprimant $\cos(\theta)/r$ en fonction de x et y on obtient :

$$\cos(\theta)/r = x/r^2 = x/(x^2 + y^2).$$

On a donc :

$$dM_y = 1/(2\pi) \cdot \rho \cdot U_{\infty} \cdot \Gamma \cdot A \cdot L \cdot dy / (L^2 + y^2) \text{ pour le plan } x = -L$$

et.

$$dM_y = -1/(2\pi) \cdot \rho \cdot U_{\infty} \cdot \Gamma \cdot A \cdot L \cdot dy / (L^2 + y^2) \text{ pour le plan } x = +L$$

L'intégrale de $dy/(L^2 + y^2)$ étant $\arctg(y/L)$, en intégrant pour tout le plan vertical (y allant de $-\infty$ à $+\infty$) on obtient :

Pour le plan amont ($x = -L$) :

$$M_{y \text{ Amont}} = 1/(2\pi) \cdot \rho \cdot U_{\infty} \cdot A \cdot \Gamma \cdot \pi$$

et pour le plan aval ($x = L$) :

$$M_{y \text{ Aval}} = -1/(2\pi) \cdot \rho \cdot U_{\infty} \cdot A \cdot \Gamma \cdot \pi.$$

La différence de quantité de mouvement de l'air entre l'aval et l'amont est donc :

$$M_{y \text{ Aval}} - M_{y \text{ Amont}} = - \rho \cdot U_{\infty} \cdot A \cdot \Gamma \quad (13)$$

On retrouve exactement l'opposé de la portance calculée à partir de la distribution de pression sur le cylindre donnée par l'équation (2.3-10).

La présence d'un écoulement tourbillonnaire autour du cylindre causé par le tourbillon d'intensité Γ crée une portance vers le haut et dévie le flux vers le bas.

6. Et en pratique ?

Pour imposer cette rotation de la vitesse autour du cylindre et déplacer les points d'arrêt amont et aval, il faut « manipuler » la couche limite qu'on a supposé d'épaisseur nulle. En fait les particules fluides au contact du cylindre adhèrent à sa surface à cause de la viscosité. En faisant tourner un cylindre dans un écoulement, on arrive à créer une « circulation » de la vitesse autour du cylindre et un écoulement semblable à celui décrit ici.

C'est l'effet Magnus : création de portance sur un cylindre tournant placé dans un écoulement. Comme on l'a vu, on peut obtenir des coefficients de portance très élevés, mais en réalité la traînée n'est pas nulle, loin de là, et la finesse (égale au rapport portance/traînée) est faible.

Une autre méthode consiste à forcer la position du point d'arrêt aval en aspirant l'air à travers une fente parallèle à l'envergure. C'est selon ce principe que fonctionne la « voile » de Lucien Malavard qui propulsait le navire « Alcyon » du Commandant Cousteau.