

### 3 - THEORIE GENERALE DE L'ÉCOULEMENT INCOMPRESSIBLE NON VISQUEUX BIDIMENSIONNEL.

#### 1. Introduction.

On examine dans ce chapitre le cas général de l'écoulement autour d'un profil d'aile en admettant qu'il est « bi-dimensionnel » ou 2D.

On a vu au chapitre 2 qu'il suffit d'étudier ce qui se passe dans un plan Oxy perpendiculaire à l'envergure Oz et que, avec cette hypothèse, on admet que l'aile est d'envergure infinie.

On introduit au §2 la notion de nombre complexe utilisée dans la suite. On reprend au §3.4 le cas de l'écoulement autour d'un cylindre (vu au Ch. 2) dans un plan Oxy mais en utilisant les nombres complexes qui sont introduits au §3.2 et la notion de tourbillon introduite au §3.3. La transformation conforme est introduite au §3.5 pour examiner le cas particulier d'une aile plane mince (plaque plane). Au §3.6 on s'intéresse à la portance et on calcule les temps de parcours des particules fluides "te" à l'extrados et "ti" à l'intrados pour le cercle (te = ti) et pour la plaque plane (Te < Ti). Enfin des conséquences pratiques sont exposées au §7.

#### 2. Ecoulement uniforme avec incidence. Nombres complexes.

Considérons un écoulement uniforme (la vitesse est la même partout) de vitesse  $U_\infty$  égale à l'unité ( $U_\infty = 1$  pour simplifier) qui fait l'angle  $\alpha$  avec l'axe Ox (elle n'est plus parallèle à Ox).

Les composantes de la vitesse sont  $u = \cos(\alpha)$  sur l'axe Ox et  $v = \sin(\alpha)$  sur l'axe Oy.

Cet écoulement (qui sera perturbé par la présence d'une l'aile) dérive du potentiel  $\phi$  vérifiant :  $d\phi/dx = \cos \alpha$  et  $d\phi/dy = \sin \alpha$  d'où  $\phi(x, y) = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$ .

Les angles sont exprimés en radians. Un tour complet de  $360^\circ$  correspond à  $2\pi$  radians, un quart de tour soit  $90^\circ$  (un angle droit) correspond à  $(2\pi)/4 = \pi/2$  radians.

Le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  est défini par ses deux composantes  $u, v$ .

Un point M du plan Oxy est défini par ses coordonnées cartésiennes  $x, y$  qui sont les composantes du vecteur **OM**.

On peut représenter un point M de coordonnées  $x, y$ , ou le vecteur **OM** par un seul « nombre » en introduisant le nombre complexe :

$$\mathbf{z} = x + \mathbf{i} \cdot y \quad (1)$$

où «  $\mathbf{i}$  » est un nombre complexe spécial =  $\sqrt{-1}$  :  $\mathbf{i}^2 = -1$ .

Comme pour les vecteurs, on note en **gras** les nombres complexes.

On dit que  $x$  est la **partie réelle** de  $\mathbf{z}$  et  $y$  la **partie imaginaire** de  $\mathbf{z}$ .

On définit le nombre **complexe conjugué** de  $\mathbf{z}$  noté  $\mathbf{z}^*$  :

$$\mathbf{z}^* = x - \mathbf{i} \cdot y. \quad (2)$$

Le **module**  $|\mathbf{z}|$  du nombre complexe  $\mathbf{z}$  est la longueur du vecteur **OM** qu'il représente :

$$|\mathbf{z}| = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}^*)^{1/2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

L'**argument** de  $z$  noté  $\arg(z) = \arctg(y/x)$  est l'angle que fait le vecteur OM avec l'axe Ox ( $\arctg$  est l'arc dont la tangente est égale à  $y/x$ ).

En tout point  $M(x, y)$  repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  ou encore par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  (avec  $r^2 = x^2 + y^2$ , et  $\theta = \arctg(y/x)$ ) on a :

$$z = x + i.y = r.exp(i.\theta) \quad (3)$$

Le complexe conjugué s'obtient simplement en changeant le signe de la partie imaginaire ou le signe de l'argument.

Le nombre complexe  $c = a.b$  a pour module  $|c| = |a|.|b|$  et  $\arg(c) = \arg(a) + \arg(b)$ .

En introduisant les nombres complexes pour représenter le vecteur  $\mathbf{v}$  dans le plan Oxy (les deux composantes) on définit la **vitesse complexe**  $\mathbf{w} = u - i.v = \cos(\alpha) - i.\sin(\alpha)$ .

$u$  (ou  $\cos(\alpha)$ ) est la partie réelle et  $-v$  (ou  $-\sin(\alpha)$ ) est la partie imaginaire de  $\mathbf{w}$ .

On montre que :

$$\mathbf{w} = \exp(-i.\alpha) \quad (4)$$

$\exp(-i.\alpha)$  représente un vecteur unitaire qui fait l'angle  $-\alpha$  avec l'axe Ox.

Attention : Le **vrai vecteur vitesse** (dont les composantes sont  $u$  et  $v$ ) correspond au **complexe conjugué  $\mathbf{w}^*$**  obtenu en changeant le signe de la partie imaginaire :

$$\mathbf{w}^* = u + i.v. \quad (5)$$

### 3. Tourbillon. Potentiel complexe.

On définit une fonction potentiel complexe  $\mathbf{F}(z)$  pour un écoulement dont la vitesse complexe est  $\mathbf{w}(z)$  par :

$$d\mathbf{F}/dz = \mathbf{w} = u - i.v. \quad (6)$$

Au [chapitre3+](#) on explique d'où vient cette notion de potentiel complexe qui découle du contexte d'un écoulement incompressible non rotationnel de fluide parfait.

Le potentiel complexe correspondant à l'écoulement uniforme (dont la vitesse complexe est donnée par (4)) est :

$$\mathbf{F} = \exp(-i.\alpha).z \quad \text{car } d\mathbf{F}/dz = \mathbf{w}.$$

Si dans cet écoulement on introduit un profil d'aile, il va être perturbé de façon telle que l'air contourne le profil : la vitesse doit être tangente au profil en tout point du profil (sauf là où elle est nulle !).

On peut satisfaire cette condition en ajoutant au champ de vitesse non perturbé (4) le champ de vitesse particulier produit par des « singularités » ponctuelles (nommées sources, tourbillons, doublets ...) placées judicieusement.

Un **tourbillon** placé à l'origine des coordonnées O ( $x=0, y=0$ ) dont l'intensité est notée  $\Gamma$  produit en un point quelconque  $M(x, y)$  une vitesse circulaire qui décroît selon l'inverse de la distance du point M à O. Cela peut s'écrire :

$$\mathbf{u}(x, y) = -(1/2\pi) \cdot \Gamma \cdot (\mathbf{k} \wedge \mathbf{OM}) / (\text{OM})^2$$

où  $\mathbf{k}$  est un vecteur (de longueur unité) perpendiculaire au plan de l'écoulement Oxy et  $\wedge$  désigne le produit vectoriel.

On a mis un signe « - » pour qu'un tourbillon  $\Gamma$  positif donne une vitesse dans le sens horaire.

Les composantes de ce vecteur sont :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (1/2\pi) \cdot \Gamma \cdot y / [x^2 + y^2] \\ v(x, y) &= - (1/2\pi) \cdot \Gamma \cdot x / [x^2 + y^2] \end{aligned}$$

La vitesse complexe est donc :

$$\mathbf{w} = u - \mathbf{i} \cdot v = (1/2\pi) \cdot \Gamma \cdot [y + \mathbf{i} \cdot x] / [x^2 + y^2]$$

En introduisant le nombre complexe  $\mathbf{z} = x + \mathbf{i} \cdot y$  qui représente la position du point M (x, y) on a :

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) = (1/2\pi) \cdot \Gamma \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{z}^* / (\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}^*)$$

soit :

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) = (\mathbf{i} / 2\pi) \cdot \Gamma / \mathbf{z} \tag{7}$$

La vitesse complexe induite par ce tourbillon peut s'écrire en explicitant le module r et l'argument  $\theta$  de  $\mathbf{z}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{z}) &= (\mathbf{i} / 2\pi) \cdot \Gamma / [r \cdot \exp(\mathbf{i} \cdot \theta)] \\ &= (\mathbf{i} / 2\pi \cdot r) \cdot \Gamma \cdot \exp(-\mathbf{i} \cdot \theta) \end{aligned}$$

Le « grandeur » de la vitesse (le module du vecteur vitesse) est  $\Gamma / 2\pi \cdot r$ , c'est à dire qu'il est toujours le même sur un cercle de rayon r et qu'il décroît en  $1/r$  quand r augmente.

L'angle du vecteur  $\mathbf{w}$  avec l'axe Ox est  $(\pi/2 - \theta)$  car  $\mathbf{i} = \exp(\mathbf{i} \cdot \pi/2)$ .

Le vecteur vitesse est représenté par  $\mathbf{w}^*$  (complexe conjugué de  $\mathbf{w}$ ) obtenu en changeant le signe de la partie imaginaire de  $\mathbf{w}$  ou en changeant le signe de son argument ( $\arctg(v/u)$ ).

L'angle du vecteur vitesse produit par un tourbillon en O d'intensité  $\Gamma$  par rapport à l'axe Ox est donc  $-(\pi/2 - \theta)$  ou  $\theta - \pi/2$ . Le vecteur vitesse est donc toujours perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{OM}$  représenté par  $\mathbf{z} = \exp(\mathbf{i} \cdot \theta)$ .

***En résumé, la vitesse produite en un point M par un tourbillon ponctuel en O est inversement proportionnelle à la distance OM et elle est perpendiculaire à OM.***

Le potentiel complexe  $\mathbf{F}$  duquel dérive cette vitesse vérifie  $d\mathbf{F}/d\mathbf{z} = \mathbf{w}$  d'où :

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = (\mathbf{i} / 2\pi) \cdot \Gamma \cdot \mathbf{Ln}(\mathbf{z}) \tag{8}$$

$\mathbf{Ln}(\mathbf{z})$  est le logarithme naturel de  $\mathbf{z}$ . Sa partie réelle est  $\text{Ln}(|\mathbf{z}|)$  et sa partie imaginaire l'argument de  $\mathbf{z}$  :

$$\mathbf{Ln}(\mathbf{z}) = \text{Ln}(|\mathbf{z}|) + \mathbf{i} \cdot \arg(\mathbf{z})$$

#### 4. Ecoulement autour d'un cylindre.

On reprend ici le calcul de l'écoulement autour d'un cylindre d'envergure infinie (Cf. Chapitre 2) mais en utilisant les nombres complexes. Pour simplifier les écritures on considère le rayon  $R = 1$  et  $U_\infty = 1$ . L'axe du cylindre est Oz et il est plongé dans l'écoulement uniforme dont la vitesse fait l'angle  $\alpha$  avec la direction Ox.

Ce cylindre découpe un cercle de rayon 1 dans n'importe quel plan Oxy.

Les points  $M(x, y)$  de ce cercle sont tous à la distance  $R = 1$  de l'origine O. Ces points sont tels que  $|z| = 1$ .

En appelant  $\theta$  l'angle que fait OM avec Ox, on a pour tous les points du cercle :

$$z = \exp(i.\theta) \quad (9)$$

Pour que l'écoulement soit tangent au cercle en tout point du cercle il suffit d'ajouter au potentiel de l'écoulement non perturbé un dipôle et (éventuellement) un tourbillon d'intensité  $\Gamma$  au centre O du cercle. Le potentiel complexe est alors :

$$F(z) = \exp(-i.\alpha).z + \exp(+i.\alpha)/z + (i/2\pi).\Gamma. \ln(z) \quad (10)$$

La vitesse complexe est  $dF(z)/dz$ :

$$w(z) = \exp(-i.\alpha) - \exp(+i.\alpha)/z^2 + (i/2\pi).\Gamma/z$$

ou

$$w(z) = \{\exp(-i.\alpha).z - \exp(+i.\alpha)/z + (i/2\pi).\Gamma\}/z \quad (11)$$

En remplaçant  $z$  par  $\exp(i.\theta)$  on a la vitesse sur le cercle de rayon 1 :

$$w(\theta) = \{\exp[-i(\alpha-\theta)] - \exp[i(\alpha-\theta)] + (i/2\pi).\Gamma\} \exp(-i.\theta)$$

Les deux premiers termes sont égaux à  $-2.i.\sin(\alpha-\theta)$  et on a :

$$w(\theta) = -2.i. \exp(-i.\theta) \{\sin(\alpha-\theta) - \Gamma/4\pi\} \quad (12)$$

Rappelons que  $\exp(i.\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ .

Donc si  $\theta = \pi/2$  on a  $\exp(i.\pi/2) = i$ , si  $\theta = \pi$  on a  $\exp(i.\pi) = -1$  et aussi  $\exp(-i.\pi) = -1$ , et enfin si  $\theta = 2\pi$  on a  $\exp(-2i.\pi) = 1$

On peut écrire  $w(\theta) = 2.\exp[-i.(\theta - \pi/2)] \{\sin(\alpha-\theta) - \Gamma/4\pi\}$ .

L'argument de  $w(\theta)$  est  $\theta - \pi/2$ . C'est l'angle du vecteur vitesse représenté par  $w^*$ . Il fait un angle droit ( $\pi/2$ ) avec  $z$  dont l'argument est  $\theta$ .

La vitesse en un point M du cercle est toujours perpendiculaire au vecteur **OM** qui est un rayon du cercle faisant l'angle  $\theta$  avec l'axe Ox, elle est donc bien tangente au cercle.

Les points d'arrêt ( $w = 0$ .) sont situés sur le cercle pour des valeurs de  $\theta$  telles que  $\sin(\alpha-\theta) = \Gamma/4\pi$ .

Si on souhaite que le point le plus en aval  $\theta = 0$  ( $x = 1$ ) soit un point d'arrêt il faut établir un tourbillon d'intensité  $\Gamma = 4\pi \cdot \sin(\alpha)$ .

On dit aussi que  $\Gamma$  est la circulation de la vitesse induite par le tourbillon. En effet si on calcule l'intégrale curviligne de  $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$  où  $\mathbf{u}$  est la vitesse induite par le tourbillon sur une courbe fermée  $C$  quelconque entourant le centre  $O$  du tourbillon on trouve  $\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma$ .

En effet, sur un cercle de rayon  $r$  (quelconque) centré en  $O$ , la vitesse due au tourbillon est tangente au cercle et égale à  $\Gamma / (2 \cdot \pi \cdot r)$  et on a :  $\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma / 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} (1/r) \cdot r \cdot d\theta = \Gamma$ .

Le module  $|\mathbf{v}|$  de la vitesse sur la surface du cylindre est alors  $|\mathbf{v}| = 2 \cdot |\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)|$  et présente un point d'arrêt de bord d'attaque en  $\theta = -\pi + 2\alpha$ . Cet écoulement autour du cylindre est représenté sur la figure 1.

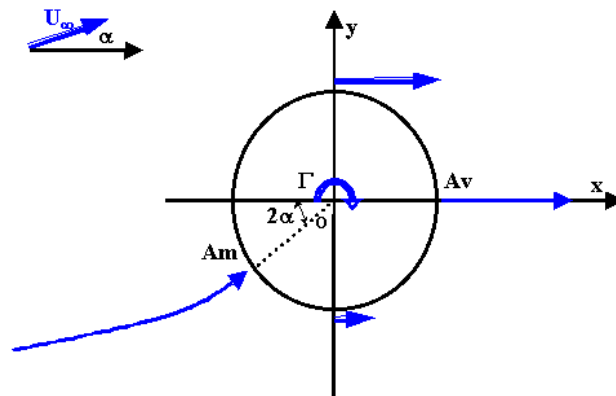


Figure 1 : Ecoulement autour du cylindre

### 5. Ecoulement 2D autour d'une aile plane mince. Transformation conforme.

Pour examiner l'écoulement autour du cylindre on a considéré un point  $M$  du plan  $Oxy$  avec ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  ou ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . En coordonnées cartésiennes l'équation qui définit un point du cercle de rayon  $R$  est  $x^2 + y^2 = R^2$ . Les points à l'extérieur vérifient  $x^2 + y^2 > R^2$ .

En coordonnées polaire les points du cercle vérifient  $r = R$  et  $-\pi < \theta < \pi$ . Dans un système d'axe  $r$  (horizontal) et  $\theta$  (vertical) le cercle est représenté par un segment de droite vertical placé à l'abscisse  $r = R$  dont les extrémités sont à  $\theta = -\pi$  et  $\pi$ .

Cette transformation des coordonnées transforme un cercle (du plan  $x, y$ ) en un segment de droite (du plan  $r, \theta$ ) de longueur  $2\pi$ .

Avec la notation complexe cette transformation s'écrit tout simplement  $\mathbf{z} = r \cdot \exp(i \cdot \theta)$ .

On peut imaginer un grand nombre de transformations de coordonnées qui transforment une courbe dans le système d'axe  $Oxy$  (plan complexe  $\mathbf{z}$ ) en une autre courbe dans un nouveau système d'axe  $OXY$  :

$$\mathbf{Z} = g(\mathbf{z}).$$

Les points  $z(x, y)$  du cercle par exemple deviennent des points  $Z(X, Y)$  qui décrivent un profil d'aile épais, une voile mince, etc.

Note : la fonction  $g(z)$  qui définit ici la transformation conforme n'a rien à voir avec la fonction "g" introduite au chapitre consacré à la théorie de la ligne portante de Prandtl.

Une transformation simple et pratique est la transformation de Joukovski (1847-1921) qui dépend du paramètre  $z_0$  :

$$Z = z - z_0 + (1 - z_0)^2 / (z - z_0) \quad (13)$$

Pour  $z_0$  réel on obtient un profil symétrique.

Si on choisit  $z_0 = 0$ , la transformation est simple :

$$Z = g(z) = z + 1/z \quad (14)$$

Et on transforme ainsi le cercle de rayon 1 en un segment de l'axe OX de longueur 4 entre  $X = -2$  et  $X = 2$ .

Si on considère une tranche de largeur A dans la direction de l'envergure OZ, on a une plaque plane infiniment mince de corde 4 et d'envergure A.

En effet pour le cercle (de rayon 1) on a  $z = \exp(i\theta)$  (Cf. éq. (9)),  $\theta$  variant entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

Alors :

$$Z = X + i.Y = z + 1/z = \exp(i\theta) + \exp(-i\theta) = 2.\cos(\theta). \quad (15)$$

Donc  $X = 2.\cos(\theta)$  et  $Y = 0$ .

Le point  $\theta = 0^\circ$  correspond à  $X = 2$ . En faisant varier  $\theta$  de 0 à  $180^\circ$  (de 0 à  $\pi$  radian) on parcourt la « surface » supérieure du segment du point  $X = 2$  vers le point  $X = -2$ , alors que si  $\theta$  varie de 0 à  $-180^\circ$  (de 0 à  $-\pi$  radian) on parcourt la « surface » inférieure.

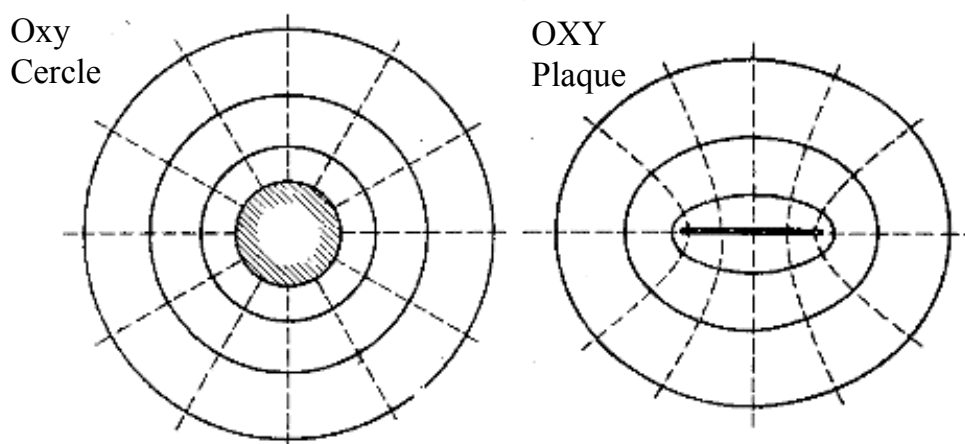


Figure 2 : Transformation conforme d'un cercle (plan  $z(x, y)$ ) en un segment rectiligne horizontal (plan  $Z(X, Y)$ ). Les "cercles" deviennent des "ellipses" et les "rayons" des "hyperboles".

Les transformations de ce type s'appellent **transformations conformes** et ont la propriété que le potentiel complexe dans le plan Oxy ( $\mathbf{z}$ ) est le même que dans le plan transformé OXY ( $\mathbf{Z}$ ) pour les points  $\mathbf{Z}$  correspondants à  $\mathbf{z}$  dans la transformation.

Le potentiel en  $\mathbf{z}$  pour le cylindre muni d'un tourbillon est égal au potentiel en un point  $\mathbf{Z} = \mathbf{z} + 1/\mathbf{z}$  dans le plan OXY de la plaque plane (Cf. éq. (10)) :

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \exp(-\mathbf{i} \cdot \alpha) \cdot \mathbf{z} + \exp(+\mathbf{i} \cdot \alpha) / \mathbf{z} + (\mathbf{i} / 2\pi) \cdot \Gamma \cdot \mathbf{Ln}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) \quad (16)$$

En notant  $\mathbf{w}(\mathbf{z}) = u - \mathbf{i} \cdot v$  la vitesse complexe (conjuguée) dans le plan Oxy du **cylindre** et  $\mathbf{W}(\mathbf{Z}) = U - \mathbf{i} \cdot V$  cette vitesse dans le plan OXY de la **plaque plane**, on a :

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) = d\mathbf{F}/d\mathbf{z} = (d\mathbf{F}/d\mathbf{Z}) \cdot d\mathbf{Z}/d\mathbf{z} = \mathbf{W}(\mathbf{Z}) \cdot d\mathbf{Z}/d\mathbf{z}$$

soit :

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) = \mathbf{W}(\mathbf{Z}) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{z}) \text{ en notant } \mathbf{g}' \text{ la dérivée de } \mathbf{g} \text{ par rapport à } \mathbf{z} \text{ ( Cf. éq. (14) ci-dessus) :}$$

$$\mathbf{g}'(\mathbf{z}) = 1 - 1/\mathbf{z}^2.$$

On a donc une relation simple entre la vitesse calculée dans le plan du cercle Oxy et la vitesse dans le plan de la plaque mince OXY :

$$\mathbf{W}(\mathbf{Z}) = \mathbf{w}(\mathbf{z}) / \mathbf{g}'(\mathbf{z}) = \mathbf{w}(\mathbf{z}) / (1 - 1/\mathbf{z}^2) \quad (17)$$

Où  $\mathbf{Z}$  est lié à  $\mathbf{z}$  par l'équation (14).

On constate immédiatement que loin du cercle (et de la plaque),  $|\mathbf{z}|$  étant grand et  $1/\mathbf{z}^2$  petit, on a :  $\mathbf{W}(\mathbf{Z}) = \mathbf{w}(\mathbf{z})$ .

Les vitesses très à l'amont et très à l'aval du cylindre et de la plaque sont égales.

Sur la surface de la plaque, il suffit de remplacer la vitesse sur le cylindre  $\mathbf{w}(\mathbf{z})$  donnée par l'équation (11) et  $\mathbf{z}$  par sa valeur  $\exp(\mathbf{i} \cdot \theta)$  sur le cylindre pour obtenir avec (17) la vitesse sur la plaque:

$$\mathbf{W}(\theta) = -2 \cdot \mathbf{i} \cdot \exp(-\mathbf{i} \cdot \theta) \{ \sin(\alpha - \theta) - \Gamma / 4\pi \} / [1 - \exp(-2\mathbf{i} \cdot \theta)] \quad (18)$$

$$\text{Avec } \mathbf{Z} = X + \mathbf{i} \cdot Y = 2 \cdot \cos(\theta) \quad (\text{Cf. éq. (15) ci-dessus}).$$

$$X = 2 \cdot \cos(\theta); Y = 0.$$

Sachant que  $[\exp(\mathbf{i} \cdot \theta) - \exp(-\mathbf{i} \cdot \theta)] = 2 \cdot \mathbf{i} \cdot \sin(\theta)$ , (18) donne :

$$\mathbf{W}(\theta) = U - \mathbf{i} \cdot V = \{ \sin(\theta - \alpha) + \Gamma / 4\pi \} / \sin(\theta) \quad (19)$$

Donc  $U = \{ \sin(\theta - \alpha) + \Gamma / 4\pi \} / \sin(\theta)$  et  $V = 0$  le long de la plaque au point d'abscisse  $X = 2 \cos(\theta)$ . La vitesse sur la plaque horizontale est bien horizontale ( $V = 0$ ).

Examinons rapidement le cas sans incidence ( $\alpha = 0$ ) et sans tourbillon ( $\Gamma = 0$ ).

On trouve  $U = 1$ . L'écoulement n'est pas perturbé par la plaque.

Dans le cas général, une difficulté apparaît si le dénominateur dans (19) est nul, c'est à dire si  $\sin(\theta) = 0$ .

Ceci se produit pour  $\theta = 0$  (bord de fuite  $X = 2$ ) et  $\theta = \pi$  (bord d'attaque  $X = -2$ ).

Dans ce cas, on a une vitesse infinie (division par 0). Ceci n'est pas en contradiction avec les hypothèses mais ça n'est pas réaliste.

C'est Joukovski qui a trouvé que l'écoulement non visqueux le plus réaliste parmi l'infinité d'écoulements mathématiquement possibles (on peut « à priori » donner n'importe quelle valeur à  $\Gamma$ ) est celui qui donne **une vitesse nulle ou finie au bord de fuite**. C'est **la condition de Joukovski**.

Pour notre plaque, pour que la vitesse reste finie au bord de fuite (où  $\theta = 0$ ,  $X = 2$  donne un dénominateur nul), il faut que le numérateur soit nul. Il faut donc que  $\sin(\theta - \alpha) + \Gamma/4\pi = 0$  pour  $\theta = 0$ .

Il doit s'établir autour du profil une circulation  $\Gamma$  de la vitesse particulière pour satisfaire la condition de Joukovski :

$$\Gamma = 4\pi \cdot \sin(\alpha) \quad (20)$$

Ici la corde du profil est égale à 4 et la vitesse relative à été choisie égale à 1.

***Dans le cas général d'un profil de corde "c" avec une vitesse relative  $U_\infty$ , l'intensité du tourbillon définie par la condition de Joukovski est :***

$$\Gamma = \pi c \cdot U_\infty \sin(\alpha) \quad (m^2/s). \quad (20')$$

La vitesse autour de la plaque est alors déterminée en tout point de l'espace et particulièrement sur la plaque où  $X = 2\cos(\theta)$  (avec  $0 < \theta < \pi$  pour l'extrados et  $-\pi < \theta < 0$  pour l'intrados) :

$$U(\theta) = \{\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)\} / \sin(\theta)$$

qui peut s'écrire :

$$U(\theta) = \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \tan(\theta/2) \quad (21)$$

Au bord de fuite ( $\theta = 0$ ,  $\tan(0) = 0$ ) on a  $U = \cos(\alpha)$ . On retrouve la composante horizontale de la vitesse relative à l'incidence  $\alpha$ . Le bord de fuite de la plaque plane n'est donc pas un point d'arrêt (le coefficient de pression  $C_p$  est différent de 1). Cette "anomalie" se produit si l'angle entre l'intrados et l'extrados est nul au bord de fuite, ce qui est le cas des profils déduit du cercle par une transformation de Joukovski.

Au bord d'attaque ( $\theta = \pi$ ,  $\tan(\pi/2) = \infty$ ) on trouve une vitesse  $U$  infinie. Cela vient du fait que la plaque est d'épaisseur nulle et que l'écoulement doit prendre un virage « très serré » pour la contourner. Pour des profils d'aile épais, on a une survitesse finie au bord d'attaque. Cette "survitesse" produit une forte dépression qui aspire le bord d'attaque vers l'amont (on parle de "suction de bord d'attaque") et ceci explique l'absence de traînée (dans le cas d'un écoulement incompressible 2D de fluide parfait examiné ici).

Quelques remarques :

- Point d'arrêt :

La vitesse s'annule pour une valeur de  $\theta_A$  vérifiant  $\sin(\theta_A - \alpha) + \sin(\alpha) = 0$  c'est à dire telle que

$$\theta_A = -\pi + 2\alpha$$

Ceci se produit pour une valeur négative de  $\theta_A$  (on a toujours pris une incidence  $\alpha$  positive), donc sur l'intrados en un point  $X_A = 2\cos(\theta_A) = -2 \cdot \cos(2\alpha)$ .



C'est la position du point d'arrêt sous la plaque près du bord d'attaque. Il est situé à faible distance du bord d'attaque.  
 Pour une incidence de  $10^\circ$ , il est à 3% de la corde en aval du bord d'attaque.

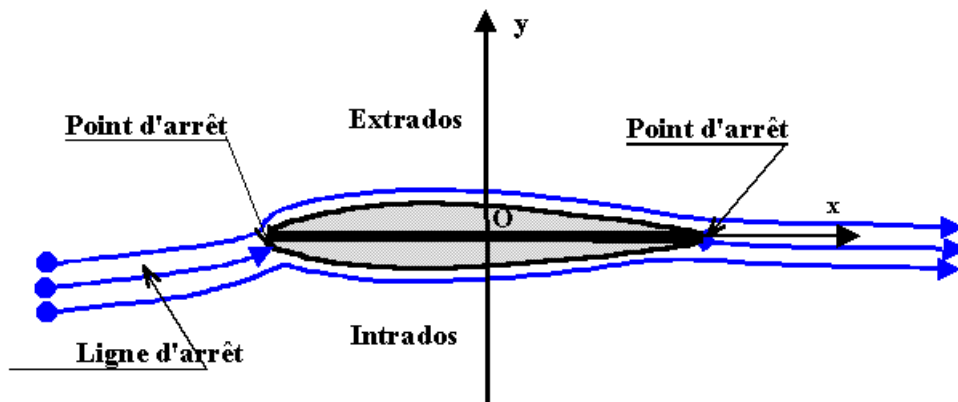


Figure 3 : L'écoulement autour de la plaque mince plane est très voisin de celui autour d'un profil d'aile.

Connaissant la vitesse sur l'extrados et l'intrados de la plaque (eq. 21) on peut calculer le coefficient de pression  $C_p$  sur la plaque. La vitesse "infini amont" étant égale à 1, on a :  $C_p = 1 - U^2$  représenté sur la figure 4.

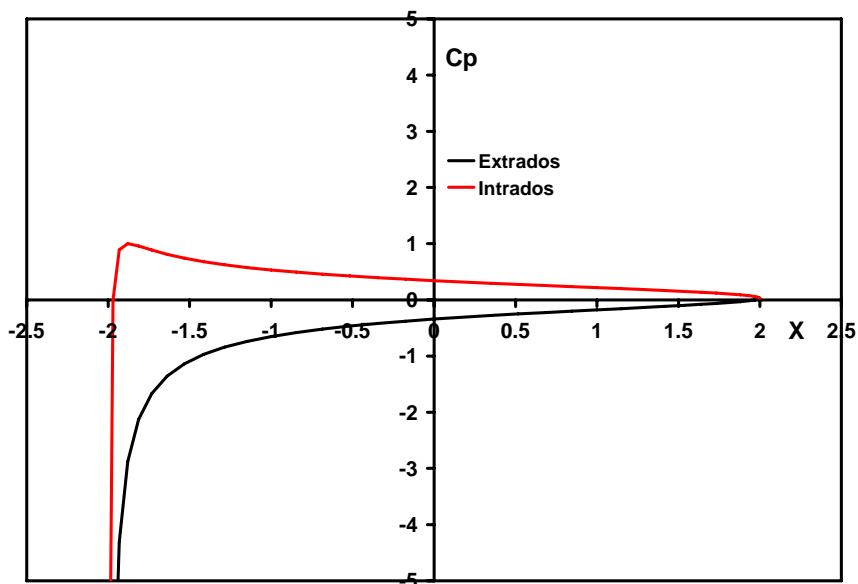


Figure 4 : Coefficient de pression  $C_p$  (extrados et intrados) d'une plaque plane (incidence  $10^\circ$  corde = 4).

On voit qu'à l'extrados il est négatif (zone de dépression) et positif à l'intrados (zone de surpression) sauf tout près du bord d'attaque en  $X = -2$  où il y a une forte dépression.

Examinons l'écoulement autour du cylindre. La vitesse est donnée par (12) avec la valeur de  $\Gamma$  donnée par (20). On trouve :  $\mathbf{w}(\theta) = 2 \cdot \mathbf{i} \cdot \exp[-\mathbf{i} \cdot (\theta)] \{ \sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha) \}$

La vitesse "physique" est :

$$\mathbf{w}^*(\theta) = u + \mathbf{i} \cdot v = -2 \cdot \mathbf{i} \cdot \exp[\mathbf{i} \cdot (\theta)] \{ \sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha) \} \quad (22)$$

On trouve  $w^* = 0$  pour  $\theta = 0$  (en Av point d'arrêt de bord de fuite), pour  $\theta = -\pi + 2.\alpha$  (en Am point d'arrêt de bord d'attaque, figure 1).

La vitesse est maximale au dessus du cylindre (extrados), en  $x = -\cos(\alpha)$  où elle est parallèle à la vitesse infinie amont et elle vaut  $2.(1 + \sin(\alpha))$ . En dessous du cylindre (intrados) la vitesse est maximale au point symétrique du précédent,  $x = \cos(\alpha)$ , et vaut  $2.(1 - \sin(\alpha))$ .

On montre figure 5 des lignes de courant autour du cylindre pour  $\alpha = 20^\circ$ .

Sur la figure 6 on montre la répartition du coefficient de pression  $C_p(x) = 1 - |w|^2$  sur le cylindre pour une valeur plus raisonnable de l'incidence  $\alpha = 10^\circ$ .

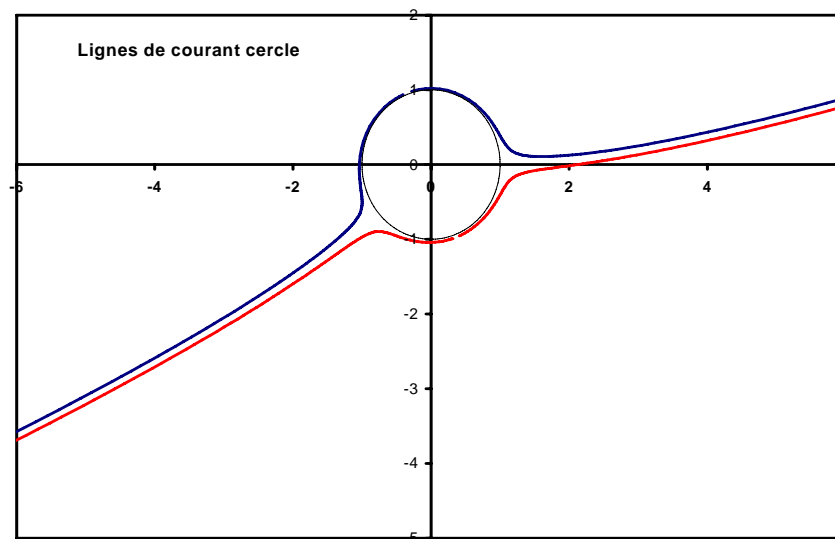


Figure 5 : Lignes de courant autour du cylindre correspondant à la plaque plane  $\alpha = 20^\circ$ .

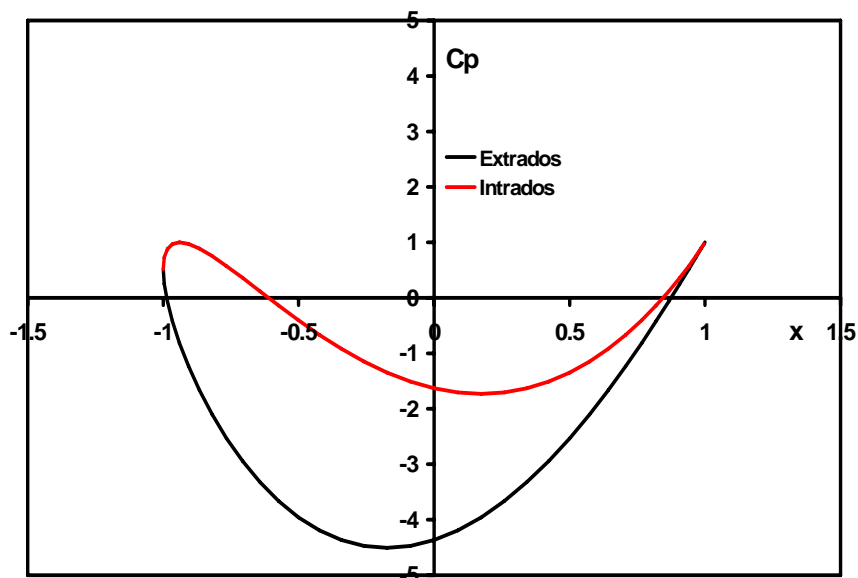


Figure 6 : Coefficient de pression  $C_p$  sur le cylindre correspondant à la plaque plane  $\alpha = 10^\circ$ .

Revenons à la plaque. En l'absence de frottement visqueux, la force de pression qui s'exerce sur la plaque est perpendiculaire à la plaque qui a un angle d'incidence  $\alpha$ .

A l'exception du bord d'attaque, cette force n'est donc pas verticale mais inclinée vers l'aval de l'angle  $\alpha$  par rapport à la perpendiculaire à la direction de  $U_\infty$ .

Elle a une composante horizontale (parallèle à  $U_\infty$ ) c'est à dire une traînée non nulle.

Or il ne doit pas y avoir de traînée !

C'est parce que cette composante vers l'aval est annulée par la "suction de bord d'attaque" localisée en  $X = -2$  où sur une surface infiniment petite se trouve une dépression infiniment grande ( $C_p = -\infty$ ).

- Discontinuité de vitesse.

En un point  $X_e = 2\cos(\theta)$  de l'extrados on a  $U_e = \cos(\alpha) + \sin(\alpha).\text{tg}(\theta/2)$  (Cf. eq. (21)) alors qu'en face, à l'intrados, en  $X_i = 2\cos(-\theta) = X_e$  on a  $U_i = \cos(\alpha) - \sin(\alpha).\text{tg}(\theta/2)$ .

On constate que le bord de fuite n'est pas un point d'arrêt ( $U_e = U_i = \cos(\alpha)$ ). Cette "anomalie" vient du fait que la plaque plane "infiniment mince" n'a pas une réalité physique.

Il y a un saut de vitesse entre l'intrados et l'extrados de la plaque.

Cette discontinuité (voir *remarque* en fin de chapitre)  $U_e - U_i = 2\sin(\alpha).\text{tg}(\theta/2)$  est nulle au bord de fuite ( $\theta = 0$ ).

Il n'y a pas de sillage émanant du bord de fuite (vrai en écoulement 2D stationnaire mais pas en 3D !).

## **6. Cas général. Portance et temps de parcours extrados-intrados.**

### 6.1 Portance.

On rappelle que la portance est la composante perpendiculaire au vent relatif  $U_\infty$  de la force exercée par l'air sur le corps, la traînée étant la composante parallèle.

On a vu que loin de l'obstacle, l'écoulement est le même pour la plaque que pour le cylindre et seule l'influence du tourbillon  $\Gamma$  est notable. La déviation du flux d'air sera la même pour n'importe quel profil obtenu par transformation conforme du cercle. On peut évaluer la portance  $L$  ( $L$  pour "lift" en anglais) avec l'équation (10) du chapitre 2 écrite ci dessous :

$$L = \rho.U_\infty.A.\Gamma$$

Avec  $U_\infty = 1$ ,  $R=1$ ,  $A$  étant une tranche d'envergure, et  $\Gamma = 4\pi.\sin(\alpha)$  (Cf. éq. (20)) on trouve :

$$L = \rho.A. 4\pi.\sin(\alpha).$$

Cette valeur est la même pour n'importe quel profil obtenu par la transformation de Joukowski.

En divisant par  $\frac{1}{2}.\rho.U_\infty^2 = \frac{1}{2}.\rho$  (on a pris  $U_\infty = 1$ ) et par la surface  $S = 4.A$  de la plaque considérée (de corde 4 et d'envergure  $A$ ) on trouve

**le coefficient de portance  $C_L$  de la plaque plane :**

$$**C_L = 2.\pi.\sin(\alpha).** \tag{23}$$

Pour un incidence  $\alpha$  de  $10^\circ$  on trouve  $C_L = 1.09$ .

Comme la corde du profil obtenu par transformation de Joukovski dépend (un peu) du paramètre " $z_0$ " qui définit la forme du profil, le coefficient  $C_L$  dépendra (un peu) du profil (mais pas la portance  $L$ ).

(On note que  $C_L$  est beaucoup plus faible que la portance obtenue avec l'effet Magnus sur un cylindre tournant.)

Connaissant la vitesse sur la plaque, on peut intégrer les forces locales de pression données par l'équation de Bernoulli. On trouve bien entendu la même valeur.

## 6.2 Temps de parcours extrados-intrados.

Attardons-nous sur le parcours de particules fluides voisines qui arrivent de l'amont, passent au voisinage du point d'arrêt et contournent la plaque (ou un profil d'aile) en passant soit par l'extrados soit par l'intrados.

Ces particules arrivent-elles en même temps au bord de fuite ?

### Cas du cylindre :

On calcule d'abord ces temps de parcours « te » (extrados) et « ti » (intrados) pour le cylindre correspondant à la plaque dont la vitesse complexe "physique" est donnée par l'équation (22). Elle est tangente au cylindre et sa valeur est :

$$|w(\theta)| = 2|\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)|. \quad (24)$$

Au point  $x = 1$  ( $\theta = 0$ ) on a  $w = 0$ , c'est le point d'arrêt aval  $Av$  au bord de fuite :  $\theta_{Av} = 0$ .

Le point d'arrêt amont  $Am$  est donné par  $\sin(\theta_{Am} - \alpha) + \sin(\alpha) = 0$  soit  $\tan(\theta_{Am}/2) = -\tan(\alpha)$  ou encore :  $\theta_{Am} = -\pi + 2\alpha$  (voir figure 1).

Les particules glissant sur l'**extrados** devront parcourir un arc de cercle allant de  $Am$  à  $Av$  (par le haut) soit  $\pi + 2\alpha$  (voir figure 1).

Les particules glissant sur l'**intrados** devront parcourir un arc de cercle allant de  $Am$  à  $Av$  (par le bas) soit  $-\pi + 2\alpha$ .

On constate que la différence de parcours  $4\alpha$  augmente avec l'incidence  $\alpha$ .

Le temps  $dt$  mis par une particule fluide qui glisse sur la paroi pour aller d'un point  $z$  (correspondant à  $\theta$ ) à un point très voisin  $z + dz$  (correspondant à  $\theta + d\theta$ ) est :

$dt = |dz|/|w(z)|$  où  $|(\ )|$  signifie module du nombre complexe  $(\ )$ .

Comme sur la paroi,  $dz$  et  $w(z)$  sont parallèles, on a aussi  $dt = |dz/w(z)|$ .

$$dt = d\theta / |2[\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)]|$$

Sur le cercle  $z = \exp(-i\theta)$ , donc  $dz = -i \cdot \exp(-i\theta) \cdot d\theta$  et avec (24)

Le temps « te » pour aller de  $Am$  à  $Av$  par l'**extrados** est donc :

$$te = \int_0^{\pi+2\alpha} d\theta / |w(\theta)| = \int_0^{\pi+2\alpha} d\theta / |2[\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)]|$$

où  $| \ |$  signifie valeur absolue (le temps étant toujours positif).

A l'extrados  $[\sin(\alpha - \theta) - \sin(\alpha)]$  est positif et donc :

$$te = \int_0^{\pi+2\alpha} d\theta / 2[\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)]$$

Le temps « ti » pour aller de  $Am$  à  $Av$  par l'**intrados** est :

$$t_i = \int_{-\pi+2\alpha}^0 d\theta / |w(\theta)| = \int_{-\pi+2\alpha}^0 d\theta / |2[\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)]|$$

Comme  $[\sin(\alpha - \theta) - \sin(\alpha)]$  est négatif à l'intrados, il faut changer le signe pour avoir la valeur absolue et :

$$t_i = -\frac{1}{2} \int_{-\pi+2\alpha}^0 d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)]$$

La différence de temps  $t_e - t_i$  (qui est le retard éventuel des particules fluides parcourant l'intrados par rapport à celles parcourant l'extrados) est :

$$t_e - t_i = \frac{1}{2} \int_0^{\pi+2\alpha} d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)] + \frac{1}{2} \int_{-\pi+2\alpha}^0 d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)]$$

$$t_e - t_i = \frac{1}{2} \int_{-\pi+2\alpha}^{\pi+2\alpha} d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)] \quad (25)$$

On montre en *annexe 1* que cette intégrale est nulle.

**Pour le cylindre :  $t_e - t_i = 0$ .**

Pour le cylindre, les particules fluides mettent le même temps pour parcourir l'extrados ou l'intrados du point d'arrêt amont au point d'arrêt aval.

Une autre méthode (méthode des résidus) est utilisée en *annexe 2* pour calculer plus simplement cette intégrale.

**Cas de la plaque plane.**

On a vu que la vitesse complexe  $\mathbf{W}(\mathbf{Z})$  dans le plan OXY d'un profil obtenu par transformation conforme du cercle du plan Oxy où la vitesse complexe est  $\mathbf{w}(\mathbf{z})$  sont liées par (17) :

$$\mathbf{W}(\mathbf{Z}) = \mathbf{w}(\mathbf{z}) / \mathbf{g}'(\mathbf{z}) \quad (26)$$

où  $\mathbf{g}'(\mathbf{z})$  est la dérivée de fonction  $\mathbf{g}$  qui définit la transformation  $\mathbf{Z} = \mathbf{g}(\mathbf{z})$ ,  $d\mathbf{Z} = \mathbf{g}'(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$ .

On a vu que le temps  $dt$  pour parcourir  $d\mathbf{z}$  à la paroi du *cercle* est  $dt = |d\mathbf{z}| / |\mathbf{w}(\mathbf{z})|$ .

On peut donc écrire avec (26) que ce temps  $dt$  est aussi :

$$dt = |d\mathbf{z}| / |\mathbf{w}(\mathbf{z})| = |d\mathbf{z}| / [|\mathbf{W}(\mathbf{Z})| \cdot |\mathbf{g}'(\mathbf{z})|] = |d\mathbf{Z} / \mathbf{W}(\mathbf{Z})| / |\mathbf{g}'(\mathbf{z})|^2$$

Or  $|d\mathbf{Z} / \mathbf{W}(\mathbf{Z})| = dT$ ,  $dT$  étant le temps mis pour parcourir un élément  $d\mathbf{Z}$  de la paroi du *profil* ou la vitesse complexe est  $\mathbf{W}(\mathbf{Z})$ .

On a donc  $dt = dT / |\mathbf{g}'(\mathbf{z})|^2$ , soit  $dT = |\mathbf{g}'(\mathbf{z})|^2 dt$ , et avec (24):

$$T_e - T_i = \frac{1}{2} \int_{-\pi+2\alpha}^{\pi+2\alpha} |g'|^2 d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)]$$

La transformation d'un cercle dans le plan x,y en une plaque plane infiniment mince dans le plan X,Y est :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + 1/\mathbf{z} \quad (14)$$

on a  $\mathbf{g}'(\mathbf{z}) = 1 - 1/\mathbf{z}^2$  avec  $\mathbf{z} = \exp(i.\theta)$  sur le cylindre d'où  $|\mathbf{g}'|^2 = 4.\sin^2(\theta)$ .

On a donc  $dT = 4.\sin^2(\theta).dt$  et :

$$T_e - T_i = 2. \int_{-\pi+2\alpha}^{\pi+2\alpha} \sin^2(\theta) d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)]$$

$$T_e - T_i = \int_{-\pi+2\alpha}^{\pi+2\alpha} [1 - \cos(2\theta)] d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)] = - \int_{-\pi+2\alpha}^{\pi+2\alpha} \cos(2\theta) d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)]$$

On exprime  $\cos(2\theta)$  en fonction de  $\theta - \alpha$  :

$$\cos(2\theta) = \cos(2\alpha) - 2.\cos(2\alpha).\sin^2(\theta - \alpha) - 2.\sin(2\alpha)\sin(\theta - \alpha)\cos(\theta - \alpha)$$

et on a :

$$\begin{aligned} T_e - T_i = & -\cos(2\alpha) \int_{-\pi+2\alpha}^{\pi+2\alpha} d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)] \\ & + 2.\cos(2\alpha) \int_{-\pi+2\alpha}^{\pi+2\alpha} \sin^2(\theta - \alpha) d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)] \\ & + 2.\sin(2\alpha) \int_{-\pi+2\alpha}^{\pi+2\alpha} \sin(\theta - \alpha)\cos(\theta - \alpha) d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)] \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle (c'est celle de  $t_e - t_i$  pour le cercle) et la troisième aussi.

En remplaçant  $\sin^2(\theta - \alpha)$  par  $\sin^2(\theta - \alpha) - \sin^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$  la seconde intégrale s'écrit :

$$\int_{-\pi+2\alpha}^{\pi+2\alpha} \sin^2(\theta - \alpha) d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)] = \int_{-\pi+2\alpha}^{\pi+2\alpha} [\sin(\theta - \alpha) - \sin(\alpha)] d\theta = -2.\pi.\sin(\alpha)$$

**Pour la plaque plane :  $T_e - T_i = -4.\pi.\sin(\alpha).\cos(2\alpha)$ . (27)**

On a calculé numériquement et représenté figure 7 deux paires de lignes de courant passant très près de l'extrados et de l'intrados d'une plaque plane à 20° d'incidence.

On a aussi calculé le temps  $T_e$  et  $T_i$  mis par des particules fluides partant ensemble de l'amont (point d'abscisse  $X = -8$ ) pour atteindre une abscisse  $X$  en suivant ces trajectoires extrados ou intrados. La figure 8 représente  $T_e$  et  $T_i$  en fonction de l'abscisse  $X$ .

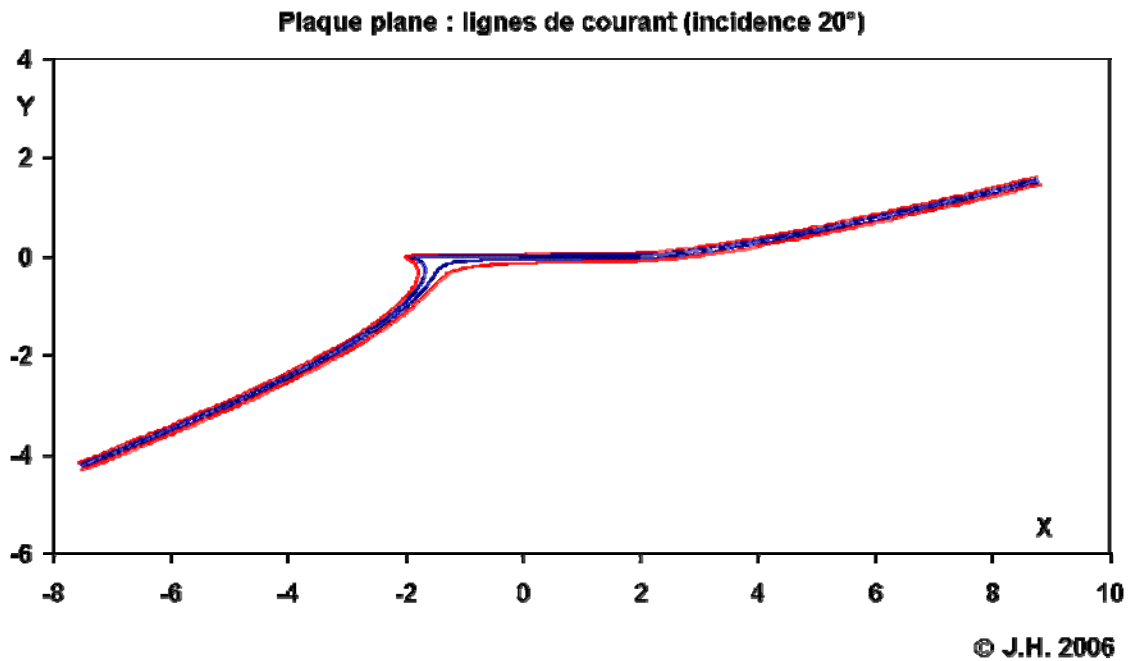


Figure 7 : Lignes de courant extrados et intrados. Plaque plane à 20° d'incidence.

On constate que les particules « extrados » mettent moins de temps pour atteindre une abscisse donnée à l'aval de la plaque que les particules « intrados ».

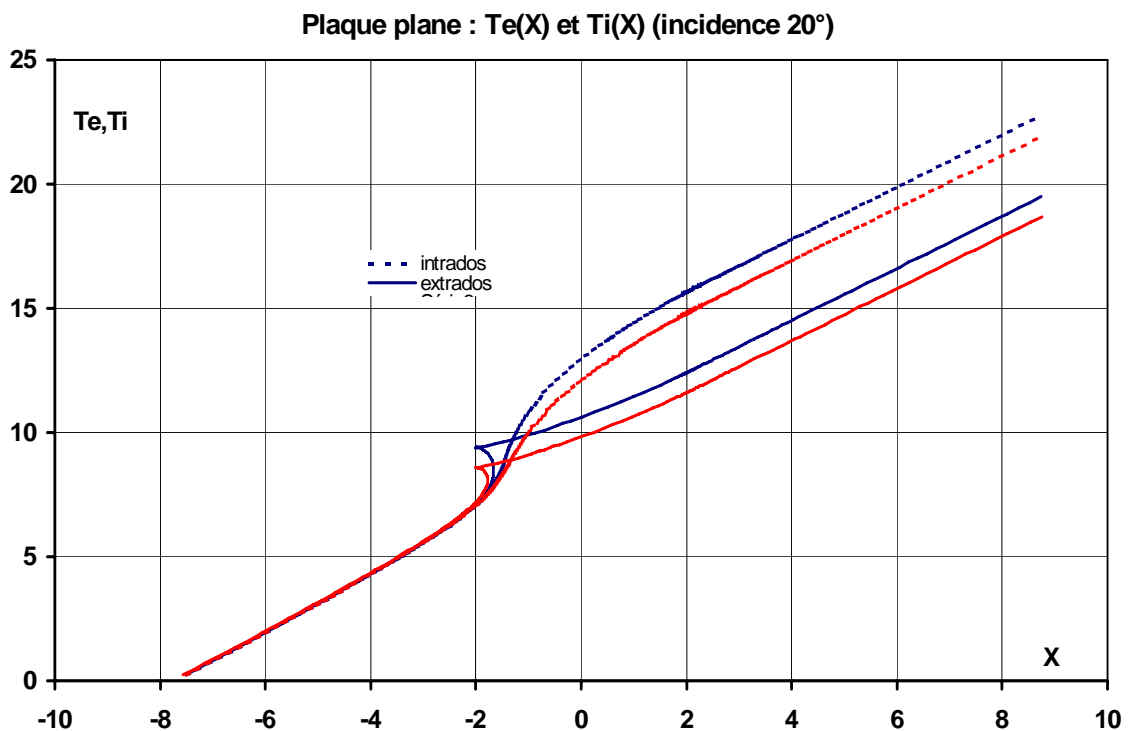


Figure 8 : Temps de parcours extrados et intrados sur deux paires de lignes de courant en fonction de l'abscisse  $X$ .

On trouve que les particules passant à l'intrados arrivent au bord de fuite  $X = 2$  pour  $T_i > T_e$ . On trouve numériquement  $T_i - T_e = 3.3$  en accord avec le résultat théorique (26) qui donne  $T_i - T_e = 3.292$ .

Les particules fluides passant par l'intrados arrivent d'autant plus tard au bord de fuite que l'incidence est importante et que le profil est mince (cet écart de temps est nul pour le cylindre).

## 7. Et en pratique ?

L'écoulement au loin, aussi appelé « le champ lointain », est donc le même pour tous les profils obtenus par transformation conforme d'un cercle. On peut donc affirmer que la force de portance sera la même pour tous ces différents profils.

On constate sur la plaque plane que la dépression d'extrados ne se produit que vers le bord d'attaque et que la création de portance a lieu très près de celui-ci.

C'est pourquoi le voisinage du bord d'attaque est renforcé sur les ailes fabriquées en « bois et toile » par exemple.

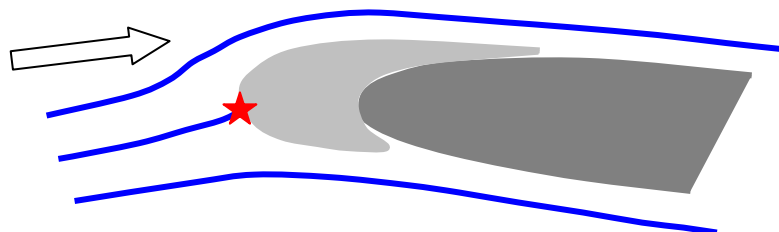
La plaque plane et plus généralement les profils « de Joukovski » présentent ce « défaut ».

Mais avec une transformation conforme plus compliquée (comme la transformation de [Schwartz-Christoffel](#)) on peut transformer un cercle en n'importe quel profil, de la série NACA par exemple. La portance sera encore la même que celle du cercle.

Comment augmenter la portance.

On voit qu'il suffit d'augmenter la surface. C'est d'ailleurs ce qu'on fait en sortant « les volets ».

On augmente aussi la portance en augmentant l'incidence mais il y a une limite qui n'est pas prévue par la théorie des fluides parfaits considérée ici.



Point d'arrêt amont ★

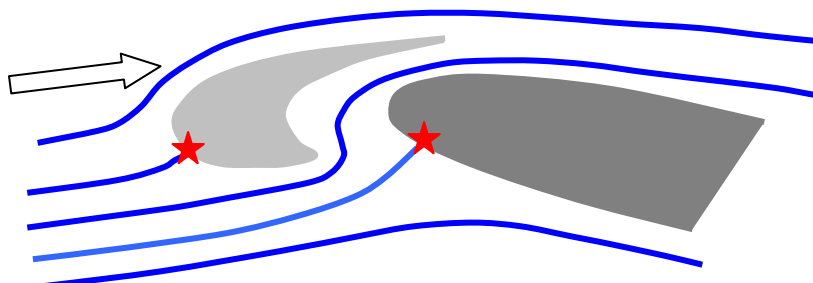


Figure 9 : Effet du déploiement de bords de bord d'attaque.

C'est qu'en réalité la valeur maximale de la portance (avant que le profil ne décroche) dépend de la forme du profil.



La théorie non visqueuse « permet » un coefficient de portance maximale de 6.28 pour une incidence  $\alpha$  de  $90^\circ$  ( $\sin(\alpha) = 1$ ) c'est à dire pour la plaque perpendiculaire au vent. C'est tout à fait utopique car en réalité les effets visqueux et les variations de pression le long du profil font décoller la couche limite, qui « pollue » le fluide « sain » avec du fluide « en rotation » et que l'hypothèse  $\text{rot}(\mathbf{V}) = 0$  de la théorie des écoulements à potentiel de vitesse n'est plus admissible.

On doit alors faire appel aux équations de Navier-Stokes (fluide visqueux). Comme la couche limite s'épaissit, elle peut être le siège d'instabilités qui mènent à une agitation chaotique. C'est la turbulence qui apparaît.

L'augmentation de portance obtenue par augmentation de l'incidence est liée au déplacement du point d'arrêt de bord d'attaque vers l'intrados. On peut "forcer" ce déplacement avec des "becs de bord d'attaque" comme le montre la figure 9.

On constate que l'écoulement qui s'établit entre le bec (en gris clair) et le bord d'attaque de l'aile (en gris foncé) « descend » le point d'arrêt de bord d'attaque de la même manière qu'une augmentation de l'incidence, ce qui produit une augmentation de la portance. De plus l'écoulement est « canalisé » autour du bord d'attaque de l'aile ce qui retarde son décollement éventuel au bord d'attaque et permet ainsi d'augmenter l'incidence de décrochage.

C'est ce même principe qui permet d'augmenter encore la portance d'une aile en déployant des volets « à fente » et qui est utilisé sur tous les avions modernes.

Mais n'oublions pas que tout ce qui a été dit dans ce chapitre concerne les écoulements « 2D » autour d'une aile d'envergure infinie !

La réalité est « 3D ».

***L'utopie « 2D » a permis de préciser l'origine de la portance d'une aile mais, sous prétexte de simplifications, elle masque des réalités fondamentales comme la présence de sillages.***

Cet aspect fondamental est étudié au chapitre 4.

**-Remarque :** *Notion de nappe tourbillonnaire.*

La discontinuité de vitesse en  $X = 2 \cdot \cos(\theta)$  étant  $U_e - U_i = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \text{tg}(\theta/2)$ , on peut dire que l'élément  $dX = -2 \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta$  de la plaque porte un tourbillon  $d\Gamma = -4 \sin(\alpha) \cdot \text{tg}(\theta/2) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta$ . Il y a donc une densité linéique de tourbillon  $d\Gamma/dX = 2 \sin(\alpha) \cdot \text{tg}(\theta/2)$ .

En intégrant sur toute la corde, du bord d'attaque au bord de fuite ( $\theta$  allant de  $-\pi$  à  $0$ ), on trouve le tourbillon total porté par la plaque :

$$\Gamma = -4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \int_{-\pi}^0 \sin(\alpha) \text{tg}(\theta/2) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = -16 \cdot \sin(\alpha) \int_{-\pi}^0 \sin^2(\theta/2) \cdot d\theta / 2$$

$$\Gamma = 4\pi \cdot \sin(\alpha)$$

C'est bien entendu la même valeur que le tourbillon porté par le cercle (concentré au centre). On peut donc dire que la plaque plane est une surface plane infiniment mince porteuse d'une densité linéique de tourbillon égale au saut de vitesse à travers sa surface.

C'est une nappe tourbillonnaire.

Ici la discontinuité de vitesse est dans la direction OX et  $d\Gamma/dX$  est égal à la discontinuité de la composante selon OX de la vitesse.

Dans le chapitre suivant on verra qu'une aile d'envergure finie génère un sillage avec une densité de tourbillon  $d\Gamma/dZ$ , la direction OZ étant celle de l'envergure. Elle produit donc une discontinuité de la composante de la vitesse parallèle à l'envergure (OZ) à travers le sillage.

**-Annexe 1 :** Calcul de l'intégrale de différence de temps de parcours extrados-intrados du point d'arrêt de bord d'attaque au point d'arrêt de bord de fuite pour **le cylindre**.

te - ti = S/2 avec

$$S = \int_{-\pi+2\alpha}^{\pi+2\alpha} d\theta / [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha)]$$

On fait le changement de variable  $x = \theta - \alpha$ . Il faut calculer :

$$S = \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} dx / [\sin(x) + \sin(\alpha)]$$

On trouve en effet dans les bons livres (« Aide mémoire de mathématiques », I.N. Bronstein et K.A. Semendiaev, Editions Eyrolles 1985 8<sup>ème</sup> édition, page 555 éq. 306) que

$$I(x) = \int dx / [\sin(x) + \sin(\alpha)] = \frac{1}{\cos \alpha} \operatorname{Ln} \left| \frac{\sin \alpha \cdot \operatorname{tg}(x/2) + 1 - \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \operatorname{tg}(x/2) + 1 + \cos \alpha} \right|$$

"Ln" étant le logarithme naturel.

En remplaçant  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  par leurs expressions en fonction de l'angle moitié  $\alpha/2$  et en divisant le numérateur et le dénominateur par  $\cos^2(\alpha/2)$  on a :

$$I(x) = \frac{1}{\cos \alpha} \operatorname{Ln} \left| \frac{\operatorname{tg}(\alpha/2) \cdot \operatorname{tg}(x/2) + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2) \cdot \operatorname{tg}(x/2) + 1} \right|$$

$$I(x) = \frac{1}{\cos \alpha} \operatorname{Ln} [\operatorname{tg}(\alpha/2)] + \frac{1}{\cos \alpha} \operatorname{Ln} \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2) + \operatorname{tg}(\alpha/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2) \cdot \operatorname{tg}(x/2) + 1} \right|$$

Donc  $S = I(\pi + \alpha) - I(-\pi + \alpha)$ .

Or

$$\operatorname{tg}[(\pi + \alpha)/2] = \operatorname{tg}[(-\pi + \alpha)/2] = -\operatorname{cotg}[(\alpha)/2]$$

donc  $I(\pi + \alpha) = I(-\pi + \alpha)$  et  $S = te - ti = 0$ .

CQFD !

**- Annexe 2 :** Calcul de l'intégrale de différence de temps de parcours extrados-intrados du point d'arrêt de bord d'attaque au point d'arrêt de bord de fuite pour **le cylindre** par la méthode des résidus.

$$S = \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} dx / [\sin(x) + \sin(\alpha)]$$

On pose  $z = \exp(ix)$ . D'où  $dz = i \cdot \exp(ix) \cdot dx = i \cdot z \cdot dx$  et  $\sin(x) = (z - 1/z)/(2i)$ .

$S = 2 \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} dz/[z^2 + 2.i.z.\sin(\alpha) - 1]$  où le contour d'intégration de la variable  $z$  est un cercle de rayon 1.

Le dénominateur présente deux racines simples (pôle d'ordre 1)  $z_1 = \exp(-i.\alpha)$  et  $z_2 = -\exp(i.\alpha)$  qui sont les points d'arrêt. Ces deux pôles sont sur le cercle et cela pose un petit problème. En fait les lignes de courant extrados et intrados qui forment le contour d'intégration sont extérieures au cercle mais infiniment proches de celui-ci. On déforme légèrement le contour d'intégration  $C_+$  au voisinage des pôles pour qu'ils soient à l'intérieur du contour d'intégration.

En appliquant la méthode des résidus (cf Aide mémoire de mathématiques, I.N. Bronstein & K.A. Semendaiev, Editions Eyrolles 1985 page 781\*) on a :

$$I = 2 \oint_{C_+} f(z).dz = 2.i.\pi \left\{ \sum_j \text{rés}(f(z))_{z=z_j} \right\}$$

$$\text{avec } \text{rés}(f(z))_{z=z_j} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - z_j)^m . f(z) \right]_{z=z_j}$$

qui donne :  $S = 4.i.\pi [1/(z_1-z_2) + 1/(z_2 - z_1)] = 0$ .