

5 - THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉCOULEMENTS À POTENTIEL DE VITESSE.

On présente ici les principes généraux qui sont à la base du calcul des écoulements à potentiel de vitesse tri-dimensionnels, éventuellement instationnaires et compressibles.

1. Introduction.

La position d'un point M (x, y, z) de l'espace est repéré par rapport à une origine O par les composantes x, y et z (ses coordonnées) du vecteur $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$.

On note en « **gras** » les vecteurs (\mathbf{u}) et en « normal » les scalaires (ρ, x, y, \dots).

On s'intéresse à l'écoulement autour d'un corps en mouvement dans un fluide au repos. Kelvin (1824-1907) a démontré que le fluide ne sera pas soumis à des rotations ou déformations internes sauf au voisinage des parois (dans la couche limite) où le frottement visqueux crée rotation et déformation.

La zone « rotationnelle » très proche de la paroi (la couche limite) s'épaissit à cause de la viscosité qui diffuse cette rotation. Si le fluide est très peu visqueux et si l'énergie cinétique des particules fluide est suffisante, cette diffusion est très faible et l'épaisseur de la couche limite reste très faible.

Par contre si l'énergie cinétique des particules fluide est trop petite (vers les points d'arrêt par exemple ou à cause d'une distribution de pression sur l'obstacle qui les ralentit) cette diffusion peut être importante et la couche limite peut « décoller » de la paroi (décrochage).

C'est le nombre de Reynolds $Re = U.L/\nu$ qui quantifie le rapport des effets d'inertie par rapport aux effets visqueux dans un écoulement (U = vitesse caractéristique, L = longueur caractéristique, ν = viscosité cinématique = $1.5 \cdot 10^{-4}$ pour l'air).

Pour un fluide parfait (non visqueux) les couches limites et les sillages ont une épaisseur infiniment mince, mais les variations spatiales de vitesses (du/dy par exemple) sont très grandes. Sur ces surfaces particulières il y a discontinuité (saut) de la vitesse (et du potentiel).

En dehors de ces surfaces, l'absence de rotation du fluide s'écrit :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

où \mathbf{rot} est un "opérateur" nommé "rotationnel" qui caractérise la rotation du champ de vitesse \mathbf{u} dont les composantes sur les axes Oxyz sont u, v, w.

$\mathbf{rot}(\mathbf{u})$ (le rotationnel de la vitesse) est un vecteur dont les trois composantes sur les axes Oxyz sont :

$$dw/dy - dv/dz ; du/dz - dw/dx ; dv/dx - du/dy$$

On dit que l'écoulement est irrotationnel.

Or on vérifie facilement que si un vecteur \mathbf{u} vérifie (1), alors ce vecteur est parfaitement défini par une fonction scalaire nommée potentiel $\phi(x, y, z)$:

$$\mathbf{u} = d\phi/dx ; v = d\phi/dy ; w = d\phi/dz \quad (2)$$

ou encore

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad} (\varphi) \quad (3)$$

On dit que \mathbf{u} est égal au « gradient » de φ .

Dire que le fluide est incompressible revient à dire que tout ce qui rentre à travers une surface fermée quelconque est égal à ce qui en sort (ce n'est pas le cas d'un ballon de baudruche !). Ceci s'écrit :

$$\text{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad (4)$$

où div est un opérateur scalaire nommé "divergence" qui caractérise la dilatation des particules fluides au cours de leur mouvement et donc la compressibilité du fluide :

$$\text{div} (\mathbf{u}) = du/dx + dv/dy + dw/dz \quad (5)$$

(Si l'écoulement est compressible, on peut écrire $\text{div}(\mathbf{u}) = q(x, y, z)$ où $q(x,y,z)$ est relié à \mathbf{u} et au potentiel φ).

L'hypothèse d'incompressibilité n'est pas nécessaire pour avoir affaire à un écoulement à potentiel de vitesse. Les calculs sont alors plus compliqués mais on peut cependant simuler des écoulements transsoniques.

2. Les équations du problème.

Avec (3) et (5) on peut donc écrire que la fonction potentiel $\varphi (x, y, z)$ qui définit la vitesse grâce à (3) vérifie

$$\text{div} (\mathbf{grad} (\varphi)) = \Delta (\varphi) = 0 \quad (6)$$

ou encore

$$d^2 \varphi/dx^2 + d^2 \varphi/dy^2 + d^2 \varphi/dz^2 = 0 \quad (7)$$

C'est la base de la théorie des écoulements à potentiel de vitesse.

L'opération écrite dans (7) (qui est une dérivée seconde de φ par rapport aux coordonnées x, y, z) s'appelle le laplacien car c'est la mathématicien français Laplace (1749-1827) qui a étudié les fonctions particulières $\varphi (x, y, z)$ satisfaisant l'équation (7). Il est noté « $\Delta\varphi$ ». On dit que le laplacien « Δ » de φ est nul.

L'équation (7) est valable partout sauf dans la couche limite (et le sillage) où le laplacien de φ est infini dans une zone infiniment mince (variation de u par exemple de l'ordre de la vitesse relative de l'aile pour une variation dy infiniment petite).

La théorie mathématique des distributions permet de formaliser cette « singularité » dans la couche limite.

Les méthodes de calcul basées sur ce principe s'appellent d'ailleurs « Méthodes de singularités ».

Ce qui va caractériser un écoulement donné, ce n'est pas l'équation (7) qui est valable pour tous les écoulements à potentiel de vitesse, mais les conditions « aux limites » sur l'aile et

donc les « sauts de vitesse » à travers la couche limite très mince qui coïncide avec la surface de l'aile particulière étudiée.

On exprime simplement que les particules fluides ne peuvent pénétrer dans le corps en mouvement mais doivent glisser sur sa surface (condition de glissement).

On écrit donc que la vitesse de l'écoulement est localement parallèle à la surface de l'aile c'est à dire que la composante normale à la paroi de la vitesse relative de l'écoulement par rapport au corps en mouvement est nulle.

On peut remarquer que la couche limite extrados est rejointe par la couche limite intrados au bord de fuite, mais que les discontinuités de vitesse (et de potentiel) extrados et intrados ne se compensent pas. Au contraire elles s'étendent vers l'infini à l'aval et forment le sillage (infinitement mince, comme les couches limites) à travers lequel on a une discontinuité du potentiel et de la vitesse tangentielle.

La localisation du sillage est une partie (la plus délicate) du problème. Dans le cas d'une aile isolée, le sillage est évacué vers l'aval et sa géométrie exacte n'est pas primordiale. Pour un rotor d'hélicoptère ou un avion « canard » par exemple, les sillages des surfaces portantes (les pales, les canards) entrent en interaction avec ces mêmes surfaces portantes. La simulation correcte de l'écoulement et la prévision correcte des performances demande une prévision exacte de la géométrie du sillage.

On sait qu'en réalité, les effets de la viscosité font s'épaissir le sillage mais le modèle décrit ici donne d'excellents résultats et sert à calculer des avions complets, des rotors d'hélicoptère...

On peut de plus faire intervenir explicitement les effets visqueux à l'aide d'un calcul de couche limite et coupler ce calcul « localement visqueux » au calcul potentiel « globalement non visqueux ».

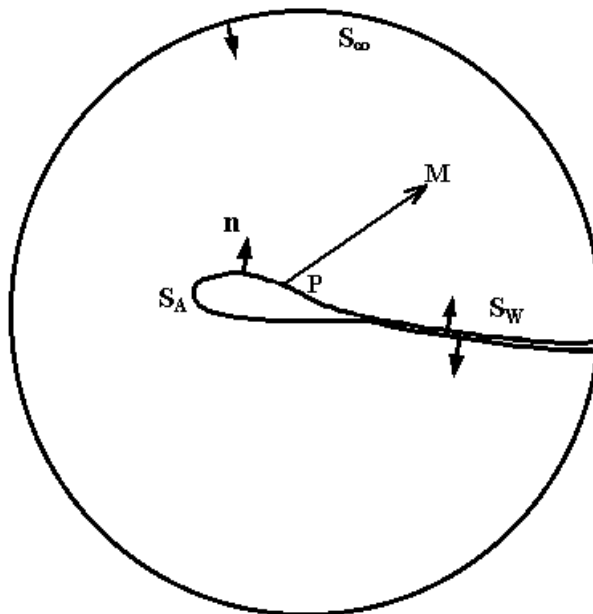


Figure 1 : Schéma de la surface d'intégration S.

La solution de l'équation (7) a été donnée par Green (1793-1844) et s'écrit :

$$4\pi\varphi(M) = -\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}(\varphi)}{r} dS + \iint_S \frac{\varphi \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS \quad (8)$$

où $M(x,y,z)$ est un point à l'intérieur du volume limité par une surface fermée S (qui peut s'étendre à l'infini), φ et $\mathbf{grad}(\varphi)$ étant nuls à l'extérieur de la surface S .

\mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à S orienté vers l'intérieur et $\mathbf{r} = \mathbf{PM}$ est le vecteur joignant un point courant P de la surface S au point M ou on exprime le potentiel φ .

Pour une aile, la surface S (schématisée figure 1) est une sphère de très grand rayon S_∞ munie d'un double feuillet qui vient de l'infini aval et représente le sillage S_w connecté au bord de fuite de l'aile pour se raccorder à la surface de l'aile S_A (l'intérieur de l'aile correspond à l'extérieur de la surface S). On peut mentionner que cette surface peut être mobile, déformable, éventuellement poreuse ...

Pour n'importe quel point P placé sur la surface S elle même (un point de l'aile) animée d'une vitesse \mathbf{v}_s , la condition de glissement des particules fluides sur l'aile donne :

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{grad}(\varphi) - \mathbf{v}_s] = 0 \text{ donc sur l'aile on a : } \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}(\varphi) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_s.$$

Les deux feuillets formant le sillage étant très proche, on les regroupe en une seule surface où il n'y a que discontinuité de la composante tangentielle de la vitesse et du potentiel.

Le terme $\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}(\varphi)$ est nul sur le sillage et bien entendu sur le reste de la surface S à l'infini.

L'équation (8) pour n'importe quel point M de l'aile devient :

$$4\pi\varphi(M) - \iint_{S_A+S_w} \frac{\varphi \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = -\iint_{S_A} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_s}{r} dS \quad (9)$$

où S_A est la surface de l'aile et S_w la surface du sillage.

On a supprimé la contribution de S_∞ qui est nulle puisque le potentiel et la vitesse sont considérés comme nuls à une distance infinie.

Par continuité, le saut de potentiel φ_w à travers le sillage immédiatement à l'aval du bord de fuite est égal à la différence de potentiel au bord de fuite extrados et intrados du profil.

En dérivant l'équation (9) $\mathbf{u} = \mathbf{grad}(\varphi)$ on trouve la vitesse en n'importe quel point de l'espace, en particulier sur la paroi de l'aile ou sur le sillage à condition de connaître φ sur S_w et S_A .

L'équation de Cauchy (1789-1857)-Lagrange (1736-1813), qui généralise l'équation de Bernoulli(1700-1782), permet de calculer la pression p connaissant φ et \mathbf{v} :

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + p = \text{cte}$$

Connaissant la pression p en tout point on en déduit les valeurs globales comme la portance, la traînée, le couple...

La condition de Kutta (1867-1944), c'est à dire l'égalité des pressions de part et d'autre de la surface S_w du sillage, conduit à :

$$\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} + \mathbf{v}_w \cdot \mathbf{grad} \varphi_w = 0$$

$$\text{ou encore } \frac{d\varphi_w}{dt} = 0 \quad (10)$$

L'équation (10) signifie que le saut de potentiel φ_w est convecté vers l'aval du sillage. On déduit ainsi le potentiel sur tout le sillage à partir de sa valeur en son lieu de naissance c'est à dire juste à l'aval du bord de fuite comme indiqué ci-dessus.

Le sillage S_w étant une surface de discontinuité de la vitesse tangentielle, la vitesse d'un point du sillage est définie comme la moyenne de la vitesse \mathbf{v}_{w1} et \mathbf{v}_{w2} de part et d'autre de cette surface :

$$\mathbf{v}_w = 1/2 (\mathbf{v}_{w1} + \mathbf{v}_{w2}).$$

On a parlé d'une aile, mais il peut y avoir plusieurs corps en mouvement quelconque et on peut appliquer cette méthode à des rotors d'hélicoptères, des hélices, un avion complet...mais le nombre de facettes devient alors très grand !

Dans le cas d'une aile unique on peut se contenter d'une valeur approchée de la vitesse induite par le sillage (qui s'éloigne rapidement) sur le profil lui même, et donc d'une géométrie de sillage approximative.

Si on s'intéresse à des engins à profils d'aile multiples (comme pour un avion « canard », un rotor d'hélicoptère, à l'interaction voilure - fuselage ou voilure - empennage) la vitesse induite par les sillages qui passent à proximité des différents corps qui composent l'engin doit être déterminée avec précision.

La principale difficulté consiste à déterminer la géométrie du sillage qui doit être telle que \mathbf{v}_w soit parallèle à la surface S_w en tout point du sillage.

3. Résolution numérique.

Pour trouver la solution de l'équation (9) on discrétise les surface S_A et S_w en un grand nombre N_A et N_w de facettes sur lesquelles $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_s$ est connu et l'équation intégrale (9) devient un système linéaire de N_A équations à N_A inconnues dont on peut calculer les solutions numériquement. On obtient ainsi les N_A valeurs de φ sur les facettes de l'aile (et celles du sillage à partir des valeurs au bord de fuite).

On peut alors calculer le potentiel (avec (8)) et la vitesse (avec (3)) en n'importe quel point de l'espace, y compris sur la surface de l'aile.

On peut imaginer plusieurs types de discrétisation et le résultat dépendra de la manière dont on a discrétisé l'équation intégrale (9). Il s'agit de retenir la méthode qui donne les meilleurs résultats tout en permettant un calcul relativement rapide.

Si on admet que les facettes SF sont planes le vecteur normal \mathbf{n} est constant sur toute la

facette et les intégrales $\iint_{SF} \frac{\varphi \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS$ et $\iint_{SF} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_s}{r} dS$ ont une expression analytique exacte

ou n'intervient que les coordonnées des sommets de la facette qui est un polygone.

On peut prendre un quadrilatère mais, dans les endroits où la surface de l'aile ou du sillage est gauche et à forte courbure, quatre points voisins de la surface ne sont pas forcément dans un plan. Si on prend des triangles dont les trois sommets sont sur l'aile (ou le sillage) on définit bien un plan, mais il faudra deux fois plus de facettes qu'avec un quadrilatère et le système linéaire à résoudre sera deux fois plus gros.

Pour que la discrétisation de l'aile (le maillage) soit le plus représentatif possible on peut raffiner le maillage dans certaines zones qui, a priori, doivent être examinées avec plus de soin comme le bord d'attaque et l'extrémité de l'aile. C'est le cas du maillage ci-dessous.

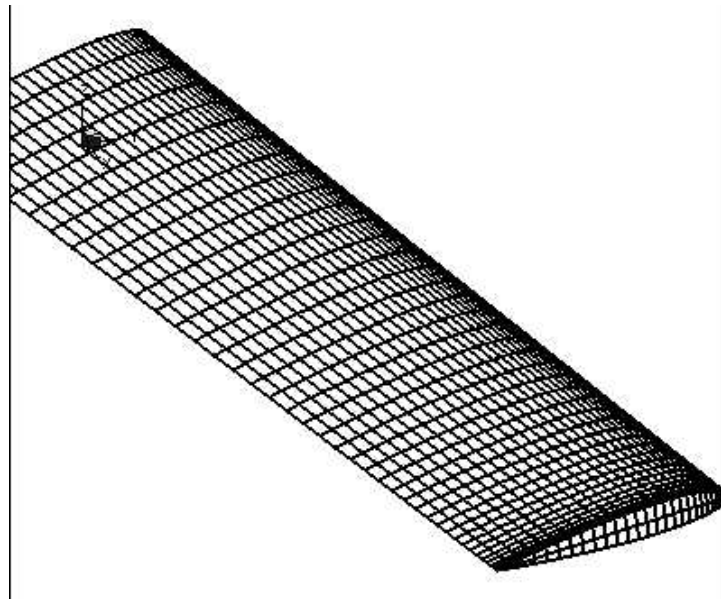


Figure 2 : Maillage d'une aile rectangulaire.

Pour réaliser le maillage de l'aile on procède de la même manière que pour la construire. L'aile est constituée de nervures (qui ont le même profil pour une aile rectangulaire mais ils peuvent être différents) disposées perpendiculairement à un longeron en différents endroits sur l'envergure. On définit le nombre NE de « nervures » et leurs positions en envergure, et pour chaque nervure on définit un profil (extrados et intrados) en NC points :

On parcourt le profil en partant du bord d'attaque (point N° 1) en passant par l'extrados on passe par le bord de fuite et on revient au bord d'attaque en passant par l'intrados.

Ces points sont les « nœuds » du maillage.

S'il y a le même nombre de segments à l'extrados et à l'intrados de la « nervure » alors NC est pair. Le bord d'attaque est le point 1, le bord de fuite le point NC/2+1.

Pour que la surface de l'aile soit fermée, l'épaisseur des « nervures » numéro 1 à l'emplanture et numéro NE à l'extrémité est nulle.

On réalise ainsi un maillage de l'aile constitué de NA = NE.NC facettes (ou panneaux d'où le nom de « panel method ») plus ou moins rectangulaires. Chacun de ces « rectangle » peut être divisé en deux triangles.

Pour le maillage du sillage (supposé connu) on définit NE lignes émanant des NE points du bord de fuite et on décompose ces NE lignes en NCW segments. Le sillage est constitué de NW = NE.NCW facettes.

Quant au potentiel ϕ on peut admettre qu'il est constant sur chaque facette* et que sa valeur est affectée au barycentre M (point de contrôle) de chaque facette. Comme le potentiel sur le sillage est déduit de la différence de potentiel sur les facettes extrados et intrados d'où il émane, son influence est connue si sa géométrie est connue.

L'équation (9) discrétisée s'écrit pour le point M barycentre de la facette IE, IC :

$$4\pi\phi(\text{IE}, \text{IC}) - \sum_{I=1}^{\text{NE}} \sum_{J=1}^{\text{NC}} \iint_{I,J} \frac{\phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS - \sum_{I=1}^{\text{NE}} \sum_{JW=1}^{\text{NCW}} \iint_{I,J} \frac{\phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = - \sum_{I=1}^{\text{NE}} \sum_{J=1}^{\text{NC}} \iint_{I,J} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_S}{r} dS$$

* On peut modéliser de manière plus sophistiquée le potentiel en admettant qu'il ait un gradient constant sur chaque facette. Ceci induit des inconnues supplémentaires et augmente la dimension du système linéaire à résoudre

Les intégrales de surface élémentaires $\iint_{I,J} \frac{\varphi \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS$ (où φ est constant avec le modèle

retenu) et $\iint_{I,J} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_s}{r} dS$ sont des expressions analytiques où intervient les coordonnées des nœuds constituant la facette (I, J) et bien sûr les coordonnées du point de contrôle (barycentre) de la facette IE, IC. On les appelle « coefficients d'influence » puisque c'est effectivement l'influence des sources et doublets portés par la facette (I, J) sur le point de contrôle de la facette (IE, IC).

On obtient donc :

$$4\pi\varphi(IE, IC) - \sum_{I=1}^{NE} \sum_{J=1}^{NC} \varphi(I, J) \cdot A_1(I, J, IE, IC) - \sum_{I=1}^{NE} \sum_{JW=1}^{NCW} \varphi(I, JW) \cdot A_2(I, JW, IE, IC) = - \sum_{I=1}^{NE} \sum_{J=1}^{NC} B(I, J, IE, IC)$$

On a vu que $\varphi(I, JW)$ (potentiel sur le panneau du sillage à l'envergure N° I et au N° JW en aval du bord de fuite) s'exprime à partir de la différence des potentiels des panneau N° I en envergure à l'extrados et à l'intrados au bord de fuite de l'aile.

Ces potentiels interviennent aussi dans la première somme et peuvent être regroupés.

Pour n'importe quelle facette IE, IC des NA facettes de l'aile, on a donc :

$$4\pi\varphi(IE, IC) - \sum_{k=1}^{NA} \varphi(k) \cdot A(k, IE, IC) = - \sum_{I=1}^{NE} B(k, IE, IC)$$

Ou encore si on note « m » la facette IE, IC on écrit :

$$4\pi\varphi(m) - \sum_{k=1}^{NA} \varphi(k) \cdot A(k, m) = - \sum_{I=1}^{NE} B(k, m)$$

On obtient un système de NA équations à NA $\varphi(k)$ inconnues, NA étant le nombre de facettes constituant l'aile. Numériquement on doit inverser une matrice carrée de NA lignes et NA colonnes.

Il se trouve que cette matrice est fort bien conditionnée et que l'inversion ne pose aucun problème et on obtient le potentiel en chacun des facettes.

En dérivant l'équation (9) par rapport aux coordonnées du point M on trouve l'expression de la vitesse en n'importe quel point de l'espace.

Les intégrales de surface étant discrétisées et en procédant comme pour le potentiel, on obtient la vitesse au barycentre de chacune des facettes de l'aile et au nœuds du sillage.

Les coefficients d'influence ne sont bien sûr pas les mêmes que pour le potentiel mais ils ont aussi une expression analytique qui ne fait intervenir que les coordonnées des nœuds du maillage.

Connaissant la vitesse au nœuds du sillage on peut déformer le sillage défini « a priori ». L'influence des facettes du sillage A_w a changée et est recalculée. On inverse la nouvelle matrice et on obtient une nouvelle solution.

On procède ainsi par itération jusqu'à ce que le sillage ne se déforme plus.

Alors $\mathbf{n}_w \cdot \mathbf{v}_w = 0$ (\mathbf{n}_w étant le vecteur normal à S_w) pour toutes les facettes du sillage et c'est bien la condition de sillage : la vitesse est tangente au sillage.

On obtient ainsi une bonne simulation de l'écoulement et un excellent accord entre les résultats des calculs et les mesures. Ceci permet de prévoir l'effet de modifications apportées aux surfaces portantes (modifications du profil, du vrillage, de la forme en plan...) sur les performances globales (portance, traînée, traction, couple...).

4. Et en pratique ?

Les figures suivantes présentent les résultats de calculs pour une aile avec des volets déployés (figure 3) et un rotor d'hélicoptère à quatre pales en vol stationnaire figure 4 (on a représenté un seul des quatre sillages pour une meilleure lisibilité).

Elles montrent bien l'enroulement du sillage vers les bords et la formation de tourbillons marginaux. Ce type de simulation d'écoulements à potentiel de vitesse basé sur des singularités réparties sur des surfaces ("panel method") présente des avantages par rapport aux méthodes plus modernes dites "éléments finis". En effet elles ne nécessitent que le maillage de surfaces (ou de petits volumes dans le cas d'écoulements compressibles). Ces surfaces (les sillages en particulier) sont justement celles où est concentré le "moteur" de l'écoulement à savoir le rotationnel de la vitesse, peuvent être déterminées avec précision sur de grandes distances.

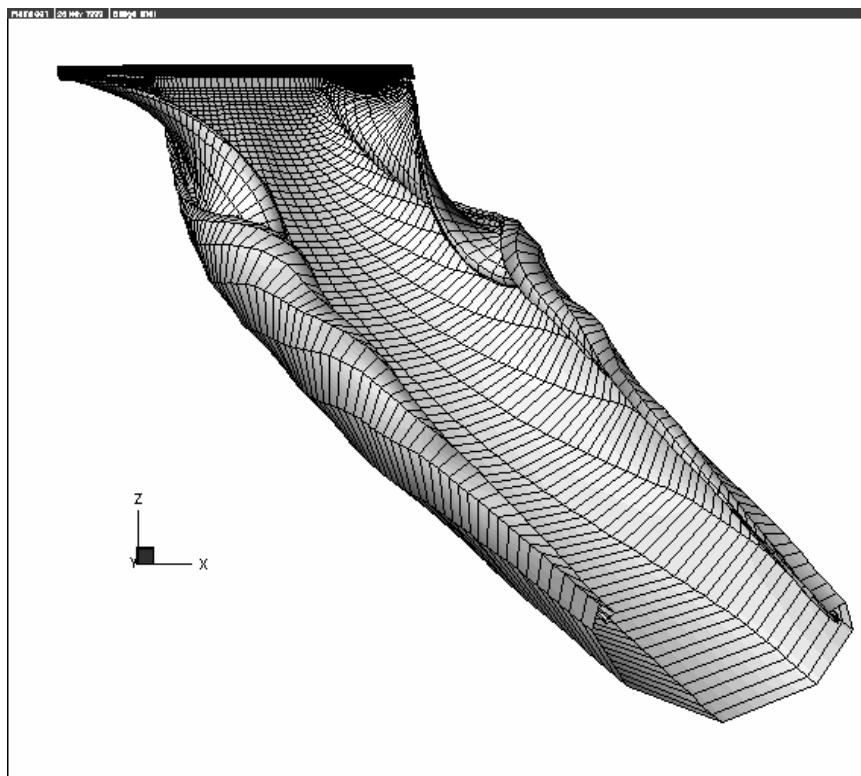


Figure 3 : Aile isolée avec volets déployés.

Une application au calcul des performances de rotors en vol stationnaire est publiée ([rotors A3F](#)) et résume les principes de cette méthode. On y évalue la précision, l'influence du maillage et la convergence vers une solution unique.

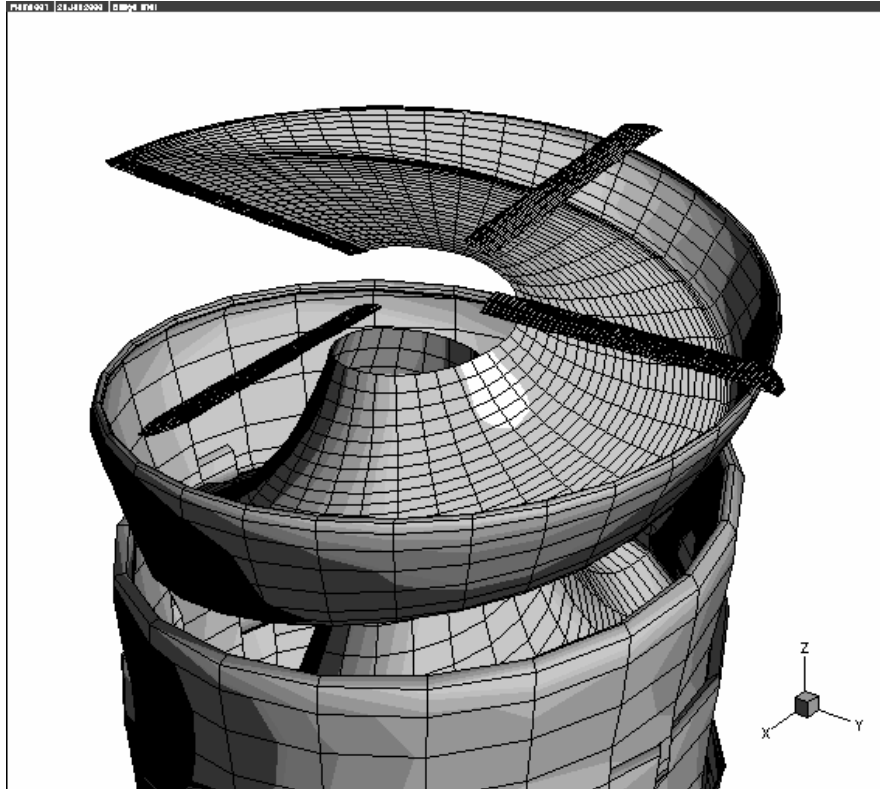


Figure 4 : Rotor d'hélicoptère isolé en vol stationnaire. On a représenté qu'un seul des quatre sillages pour une meilleure lisibilité.