

4 - THEORIE DE LA LIGNE PORTANTE DE PRANDTL (1875-1953).

On examine dans ce chapitre l'écoulement "tridimensionnel" autour d'un profil d'aile d'envergure finie. Cela nous conduira à l'"aile elliptique", la "turbulence de sillage" et aux aile de planeur. On suppose l'écoulement incompressible et non visqueux pour utiliser "localement" (c'est à dire à une position en envergure donnée) les résultats de la théorie 2D exposée au chapitre 3 et qui sont résumés ci dessous.

1. Rappel des résultats de la théorie « 2D ».

Une tranche d'aile de longueur "A" (envergure) et de corde "c₀" placée dans un écoulement à la vitesse U_∞ (vitesse à "l'infini amont") et d'envergure infinie (2D) subit une force de portance L (perpendiculaire à la direction de U_∞) :

$$L = \rho \cdot A \cdot U_{\infty} \cdot \Gamma_0. \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique du fluide et Γ₀ l'intensité du tourbillon central qui permet de satisfaire la condition de Joukovski (vitesse non infinie au bord de fuite). Cette valeur de Γ₀ est :

$$\Gamma_0 = \pi \cdot c_0 \cdot U_{\infty} \cdot \sin(\alpha_0). \quad (2)$$

α₀ étant l'angle d'incidence du profil (angle entre la corde et la vitesse infini amont supposée être horizontale (parallèle à Ox). Si α₀ est petit, sin(α₀) = α₀ exprimé en radians.

$$\Gamma_0 = \pi \cdot c_0 \cdot U_{\infty} \cdot \alpha_0. \quad (3)$$

La traînée D (composante parallèle à la direction de U_∞) est nulle.

Une ligne tourbillon (rectiligne dans le cas 2D, ou courbe en 3D) suit les mêmes règles qu'un courant électrique. Helmholtz (1821-1894) a montré qu'une ligne tourbillon doit être fermée, la fermeture étant à distance finie ou infinie.

Pour **une aile d'envergure finie "A"**, il paraît logique de prolonger le tourbillon central attaché à l'aile par deux lignes tourbillons entraînés vers l'infini aval par l'écoulement. Le schéma de l'écoulement est représenté sur la figure 1 ci-dessous.

Le profil d'aile s'étend de z = -A/2 à z = A/2. Son envergure est A.

Les tourbillons d'extrémité (d'intensité +Γ₀ en z = -A/2 et -Γ₀ en z = A/2) induisent sur le profil (en particulier sur l'axe Oz) une vitesse verticale orientée vers le bas qui dépend de la distance du point de l'axe Oz considéré au tourbillon. Cette distance est A/2 - z pour l'un et A/2 + z pour l'autre.

Ces tourbillons étant semi infinis, la vitesse induite par chacun d'eux est la moitié de la vitesse induite par des tourbillons infinis. En tenant compte du signe opposé des tourbillons la composante verticale v(z) est:

$$v(z) = -(1/4\pi) \cdot [-\Gamma_0/(z - A/2) + \Gamma_0/(z + A/2)].$$

Au centre de l'aile (z=0) par exemple on a v(z=0) = -(1/π)·Γ₀/A.

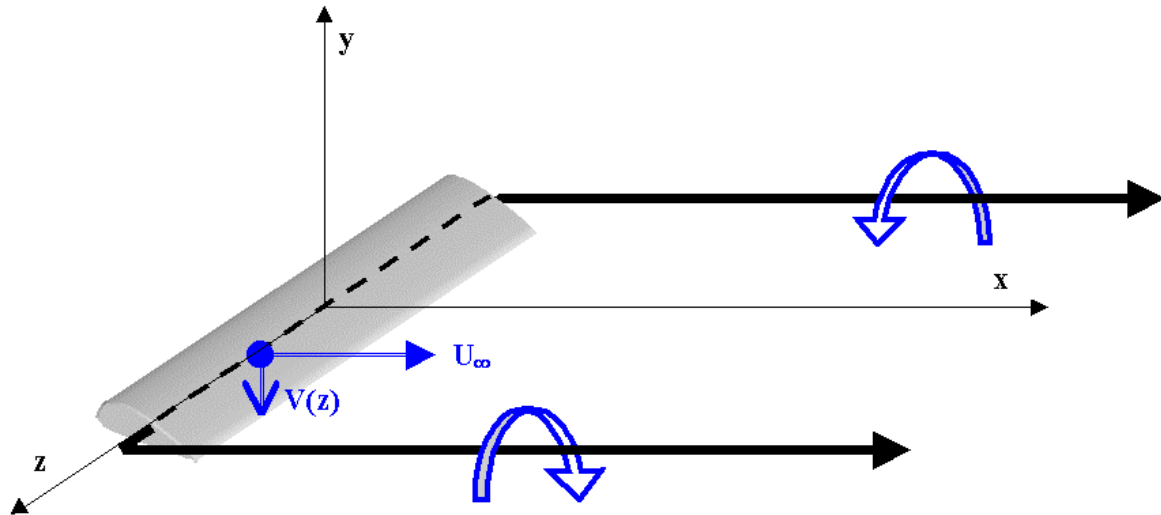


Figure 1 : schéma d'écoulement d'aile d'envergure finie. Le tourbillon central est prolongé vers l'infini aval par deux tourbillon rectilignes.

Cette **vitesse induite est donc orientée vers le bas (downwash en anglais)** et sa grandeur notée $V(z)$ est l'opposé de $v(z)$:

$$V(z) = (1/4\pi) \cdot [-\Gamma_0/(z - A/2) + \Gamma_0/(z + A/2)]. \quad (4)$$

Du coup, une tranche située à l'envergure z du profil d'aile n'est plus soumise au flux horizontal U_∞ mais à un flux légèrement dévié vers le bas. La déviation du flux vers le bas β est donnée par :

$\text{tg}(\beta) = V(z)/U_\infty$, et si β est petit :

$$\beta(z) = V(z)/U_\infty. \quad (5)$$

Dans ces conditions, l'angle d'incidence local n'est plus α_0 mais $\alpha_0 - \beta(z)$.

La vitesse locale n'est plus U_∞ mais $U(z) = \sqrt{U_\infty^2 + V(z)^2}$. Si $V(z)$ est petit par rapport à U_∞ on peut considérer qu'on a encore U_∞ .

L'angle d'incidence ayant changé, l'intensité du tourbillon central à cette envergure z ne sera plus donnée par (3) mais par :

$$\Gamma(z) = \pi \cdot c_0 \cdot U_\infty \cdot [\alpha_0 - \beta(z)]. \quad (6)$$

On constate donc que $\Gamma(z)$ dépend de $\beta(z)$ (par (6)), qui dépend de $V(z)$ (par (5)), qui dépend de Γ par l'équation (4) !

Le problème se complique donc et il faut admettre que l'intensité du tourbillon central $\Gamma(z)$ dépend de l'envergure z .

2. Vitesse induite « Downwash ».

Le profil d'aile n'évacue donc pas le tourbillon Γ_0 à ses extrémités ($z = -A$ et $z = A$) mais tout le long de l'envergure et on arrive au schéma de la figure 2.

Un élément d'envergure de longueur dz situé près du point $P(z)$ évacue un tourbillon semi infini d'intensité $d\Gamma(z) = \Gamma(z + dz) - \Gamma(z)$.

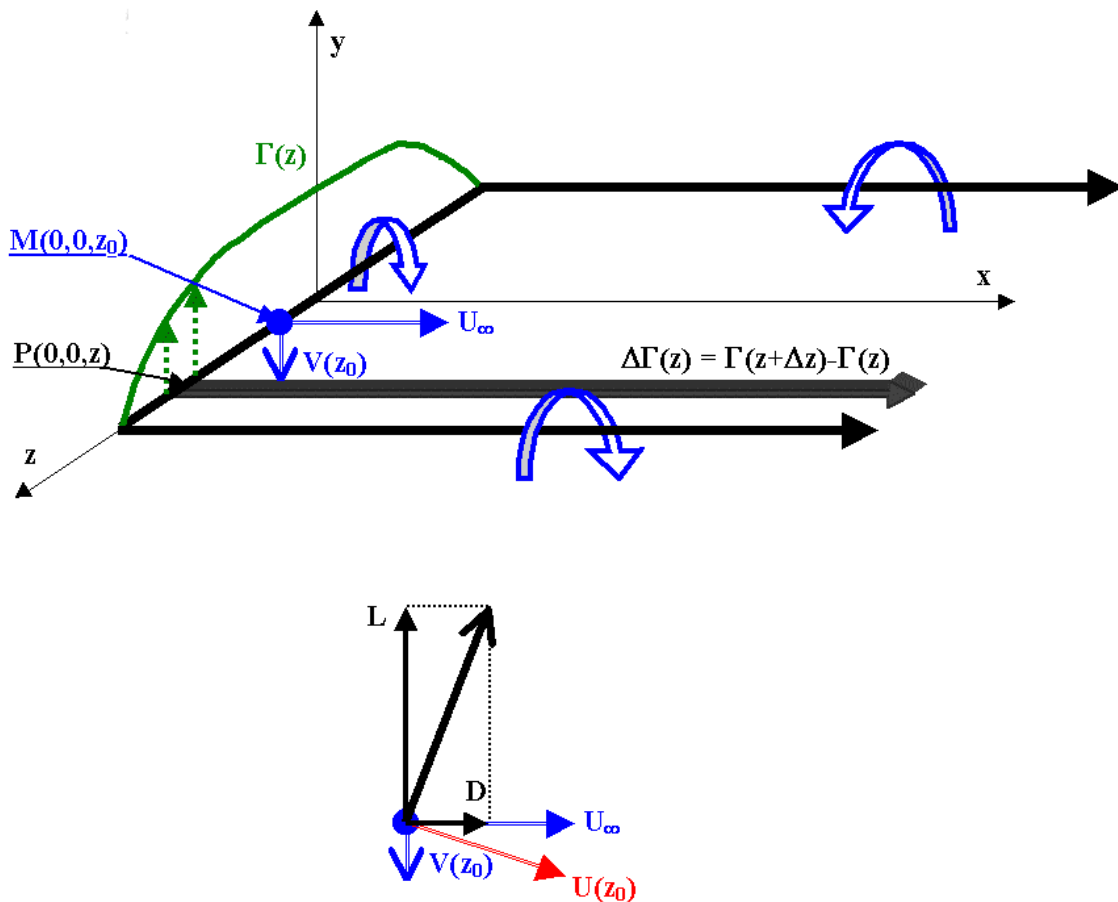


Figure 2 : Schéma de l'écoulement 3D autour d'un profil d'aile. Evacuation de tourbillons vers l'aval répartie le long de l'envergure du profil.

Cet élément de tourbillon $d\Gamma(z)$ émanant du point $P(z)$ induit en un point $M(z_0)$ situé à l'envergure z_0 une vitesse dont la composante sur l'axe Oy est :

$$dv(z_0) = (1/4\pi).d\Gamma(z)/(z-z_0).$$

On remarque que vers l'extrémité $z = A/2$ de l'aile par exemple, $\Gamma(z)$ diminue (pour s'annuler à $z=A/2$) et donc $d\Gamma(z) < 0$ ce qui induit une composante $dv(z_0)$ négative (vers le bas) en un point $M(z_0=0)$ situé au centre de l'aile ($(z-z_0) > 0$).

De même le tourbillon $d\Gamma(z)$ en $P(z)$ avec $z < 0$ de la figure 2 est positif et induit au point $M(z_0=0)$ au centre de l'aile ($(z-z_0) < 0$) une vitesse dont la composante sur Oy qui est donnée par (7) est aussi négative.

La grandeur de la vitesse induite vers le bas par un tourbillon élémentaire de sillage entre z et $z+dz$, appelée « downwash » par les Anglo-saxons, est donc :

$$dV(z_0) = -dv(z_0) = -(1/4\pi).d\Gamma(z)/(z-z_0).$$

La vitesse induite totale vers le bas (« downwash ») en $M(z)$ par l'ensemble de ces tourbillons élémentaires est :

$$V(z_0) = - \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int_{-A/2}^{A/2} d\Gamma / (z - z_0). \quad (7)$$

En intégrant par partie on trouve :

$$V(z_0) = - \left(\frac{1}{4\pi} \right) \left[\frac{\Gamma(z)}{(z - z_0)} \right]_{-A/2}^{A/2} + \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int_{-A/2}^{A/2} \Gamma(z) dz / (z - z_0)^2.$$

Comme $\Gamma(z)$ est nul aux extrémités $-A/2$ et $A/2$ de l'aile, le premier terme est nul et :

$$V(z_0) = \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int_{-A/2}^{A/2} \Gamma(z) dz / (z - z_0)^2. \quad (7a)$$

Dans un cas « standard » $\Gamma(z) > 0$ sur toute l'envergure du profil, le « downwash » est bien positif et la vitesse induite totale est vers le bas.

Une aile en 3D n'a pas forcément une forme en plan rectangulaire et elle peut être vrillée. La corde et l'incidence géométrique dépendent de l'envergure et on notera $\alpha(z_0)$ et $c(z_0)$ l'incidence et la corde en $z=z_0$.

La vitesse induite verticale s'ajoutant vectoriellement à la vitesse horizontale U_∞ , l'incidence locale qui était $\alpha(z_0)$ est modifiée. Elle est notée $\alpha'(z_0)$:

$$\alpha'(z_0) = \alpha(z_0) - \beta(z_0) = \alpha(z_0) - V(z_0)/U_\infty. \quad (8)$$

L'intensité du tourbillon central est donc modifiée. Elle est notée Γ et l'équation (6) donne :

$$\Gamma(z_0) = \pi \cdot c(z_0) \cdot U_\infty \cdot [\alpha(z_0) - V(z_0)/U_\infty]. \quad (9)$$

Les équations (7) (ou 7a) et (9) expriment le couplage de la vitesse induite par le sillage avec la distribution de tourbillon sur le profil.

Il faut noter que en général la corde « c » et l'incidence géométrique locale « α » dépendent de la position en envergure z_0 .

- Pour examiner l'influence de ce couplage on écrit :

$$\Gamma(z) = \Gamma_0 \cdot g(z). \quad (10)$$

Où :

Γ_0 est constant (ne dépend pas de z) et représente une circulation de référence, la circulation théorique « 2D » dans le plan de symétrie de l'aile $z = 0$ par exemple où la corde est c_0 et l'incidence géométrique α_0 soit :

$$\Gamma_0 = \pi \cdot c_0 \cdot \alpha_0 \cdot U_\infty$$

$g(z)$ est une fonction inconnue qui décrit la répartition de $\Gamma(z)$ sur l'aile en tenant compte de la variation de la corde (forme en plan) et de l'incidence géométrique (vrillage) de l'aile mais aussi de la vitesse induite par le sillage.

S'il n'y avait pas de sillage et pour une aile rectangulaire non vrillée on aurait $g(z) = 1$.

- Pour faire disparaître la demi envergure "A" dans l'intégrale des équations (7) et (7a) qui expriment la vitesse induite:

$$V(z_0) = - \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int_{-A/2}^{A/2} d\Gamma / (z - z_0) \quad (7)$$

$$V(z_0) = \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int_{-A/2}^{A/2} \Gamma(z).dz / (z - z_0)^2 . \quad (7a)$$

on change de variable et on remplace z par $Z = z/(A/2)$ (et z_0 par $Z_0 = z_0/(A/2)$).

Z varie donc de -1 à 1 pour décrire toute l'aile.

Les équations (7) et (7a) deviennent :

$$V(z_0) = - \left(\frac{\Gamma_0}{4\pi A} \right) \int_{-1}^1 dg(Z) / (Z - Z_0)$$

$$V(z_0) = \left(\frac{\Gamma_0}{2\pi A} \right) \int_{-1}^1 g(Z).dZ / (Z - Z_0)^2$$

On appelle $G(Z_0)$ l'intégrale définie (positive) qui ne dépend que de Z_0 :

$$G(Z_0) = \int_{-1}^1 g(Z).dZ / (Z - Z_0)^2 \quad \text{ou} \quad (11)$$

$$G(Z_0) = \int_{-1}^1 dg(Z) / (Z - Z_0) \quad (11a)$$

Et on a :

$$V(Z_0) = (\Gamma_0/2\pi A).G(Z_0). \quad (12)$$

Les expressions (11) et (11a) sont équivalente pour exprimer $V(Z_0)$ et on peut utiliser la plus commode.

En introduisant $Z_0=z_0/A$ dans l'équation (9), elle devient :

$$\Gamma(Z_0) = \pi.c(Z_0).U_\infty .[\alpha (Z_0)-V(Z_0)/U_\infty]. \quad (9a)$$

En remplaçant dans cette équation $V(Z_0)$ par son expression (12) on a:

$$\Gamma(Z_0) = \pi.c(Z_0).U_\infty .\alpha (Z_0) - c(Z_0) / (2A).\Gamma_0.G(Z_0).$$

Limitons nous pour le moment à une aile rectangulaire et non vrillée, alors $c = c(0) = c_0$, $\alpha = \alpha(0) = \alpha_0$ et comme $\pi.c_0.U_\infty .\alpha_0 = \Gamma_0$ on a :

$$\Gamma(Z_0) = \Gamma_0.[1 - (c_0/2A).G(Z_0)] \quad \text{pour } Z_0 \text{ allant de } -1 \text{ à } 1. \quad (13)$$

(c_0/A) est le rapport de la corde à l'envergure de l'aile. Pour une aile rectangulaire on définit l'allongement de l'aile par le rapport A/c_0 . Pour une forme en plan quelconque on définit

l'allongement $\Lambda = A^2/S$ où S est la surface de l'aile et A l'envergure (Λ est appelé Aspect-Ratio par les anglo-saxons). Pour une aile rectangulaire $\Lambda=A/c_0$.
 On constate, comme on pouvait s'y attendre, que plus l'allongement est grand (c_0/A petit), plus la distribution de tourbillon sur l'aile se rapproche de sa valeur donnée par la théorie 2D.

3. Traînée induite.

Connaissant $\Gamma(Z_0)$ on en déduit la force perpendiculaire à la vitesse locale en appliquant "localement" l'équation (1) à une tranche d'aile de largeur $dz_0 = A/2.dZ_0$:

$$dF(Z_0) = \rho.A/2.dZ_0.U.\Gamma(Z_0)$$

Cette force n'est plus perpendiculaire à U_∞ , mais à la vitesse locale qui est déviée vers le bas du fait de la vitesse induite (voir figure 2).

Du fait de cette déviation, il y aura une composante parallèle à la vitesse infini amont : c'est la **traînée induite**.

Les composantes de dF sur Oy et Ox sont la portance dL et la traînée dD :

$$dL(Z_0) = \rho.A/2.dZ_0.U_\infty .\Gamma(Z_0) \tag{14}$$

$$dD(Z_0) = \rho.A/2.dZ_0.V(Z_0).\Gamma(Z_0) \tag{15}$$

En remplaçant $\Gamma(Z_0)$ et $V(Z_0)$ par leurs expressions (12) et (13) on a :

$$dD(Z_0) = (1/4\pi).\rho.\Gamma_0^2.[1 - (c_0/2A).G(Z_0)].G(Z_0).dZ_0 \tag{16}$$

dD est proportionnel à Γ_0^2 c'est à dire au carré de l'incidence α_0 .

La traînée induite est proportionnelle au carré de l'incidence α_0 .

La portance est voisine de dF donné par (14) et la finesse est dF/dD soit :

$$\text{Finesse locale} = (2A/c_0)/(G(Z_0).\alpha_0).$$

La finesse est proportionnelle à l'Allongement A/c et diminue avec l'incidence α_0 .

Pour obtenir les performances globales de l'aile il faut intégrer sur l'envergure (Z allant de -1 à 1).

On peut optimiser ces performances en optimisant la fonction G.

Dans ces calculs on a négligé les effets de la viscosité (les frottements) qui contribuent à la traînée réelle qui n'est pas nulle à incidence nulle.

4. Aile elliptique.

C'est à la théorie de la ligne portante de Prandtl qu'on doit les ailes elliptiques des avions des années 1930-1950 (DC3, B17, Spitfire, P51 Mustang ...).

En effet si on cherche quelle aile donnera la traînée induite minimale, on trouve qu'il faut une répartition de $\Gamma(Z)$ sur l'envergure qui ait la forme $\Gamma(Z) = \text{Cte}.(1 - Z^2)^{1/2}$. Ceci peut être obtenu si la corde de l'aile varie en envergure de la même manière. Vu du dessus (forme en plan) l'aile a l'allure d'une ellipse. C'est ce qui va être démontré ci-dessous.

4.1 Condition pour une traînée minimale.

La traînée sur un élément d'envergure dZ_0 située en Z_0 est donnée par (15) :

$$dD(Z_0) = \rho \cdot A/2 \cdot dZ_0 \cdot V(Z_0) \cdot \Gamma(Z_0).$$

en remplaçant $V(Z_0) = (\Gamma_0/2\pi A) \cdot G(Z_0)$ (équation (12)) et $\Gamma(Z_0) = \Gamma_0 \cdot g(Z_0)$ (équation (10)) on obtient :

$$dD(Z_0) = (1/4\pi) \cdot \rho \cdot \Gamma_0^2 \cdot g(Z_0) \cdot G(Z_0) \cdot dZ_0$$

$$\text{avec } G(Z_0) = \int_{-1}^1 dg(Z)/(Z - Z_0) \quad (\text{voir \u00e9q. (11)})$$

La traînée totale D de toute l'aile est l'int\u00e9grale de la traînée \u00e9l\u00e9mentaire de $Z_0 = -1$ \u00e0 $Z_0 = 1$:

$$D = (1/4\pi) \cdot \rho \cdot \Gamma_0^2 \int_{-1}^1 g(Z_0) \cdot G(Z_0) dZ_0. \quad (17)$$

On remarque que la traînée induite est proportionnelle au carr\u00e9 de Γ_0 (donc au carr\u00e9 de l'incidence).

Pour calculer D on fait le changement de variable :

$$Z_0 = -\cos(\theta). \quad (18)$$

Quand θ varie de 0 \u00e0 π , Z_0 couvre bien l'intervalle -1, 1, la valeur $\theta = \pi/2$ correspondant \u00e0 $Z_0 = 0$.

Donc $g(Z_0)$ et $G(Z_0)$ deviennent des fonctions de θ , et $dZ_0 = \sin(\theta) \cdot d\theta$.

De plus on va supposer que la fonction $g(\theta)$ (qui repr\u00e9sente la r\u00e9partition de Γ en envergure) est une s\u00e9rie de Fourier.

Il y a certaines contraintes sur $g(\theta)$:

- $g(Z_0) = 0$ pour $Z_0 = -1$ et 1 c'est \u00e0 dire $\theta = 0$ et π .

Il ne faut donc que des termes en sinus dans la s\u00e9rie de Fourier.

- Du fait de la sym\u00e9trie de l'aile et donc de la distribution de Γ par rapport \u00e0 $z = 0$, on doit avoir $g(-Z_0) = g(Z_0)$. Il faut que $g(\pi - \theta) = g(\theta)$.

Il ne faut donc que des termes « impairs ».

On \u00e9crit donc:

$$g(\theta) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k \cdot \sin[(2k+1) \cdot \theta] \quad (19)$$

$$\text{du coup } dg(\theta) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k \cdot (2k+1) \cdot \cos[(2k+1) \cdot \theta] \cdot d\theta$$

et

$$G(Z_0) = \int_{-1}^1 dg(Z)/(Z - Z_0)$$

devient

$$G(\theta) = \sum_{k=0}^{k=\infty} (2k+1) \cdot a_k \cdot \int_0^{\pi} \frac{\cos[(2k+1)\theta]}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} d\theta .$$

On trouve* que :

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos[(2k+1)\theta]}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} d\theta = \pi \cdot \sin[(2k+1)\theta] / \sin(\theta)$$

*« Theoretical aerodynamics », L.M. Milne-Thomson, Mc Millan & Co, London 1952 page 80.

donc :

$$G(\theta) = \pi \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} (2k+1) \cdot a_k \cdot \sin[(2k+1)\theta] / \sin(\theta) . \quad (20)$$

En faisant le changement de variable (18) et en remplaçant g et G par leur expression (19) et (20) dans (17) on obtient :

$$D = (1/4) \cdot \rho \cdot \Gamma_0^2 \int_0^{\pi} \left\{ \left[\sum_{l=0}^{l=\infty} a_l \cdot \sin[(2l+1)\theta] \right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{k=\infty} (2k+1) \cdot a_k \cdot \sin[(2k+1)\theta] \right] \right\} d\theta$$

ou encore :

$$D = (1/4) \cdot \rho \cdot \Gamma_0^2 \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{k=0}^{k=\infty} (2k+1) \cdot a_k \cdot a_l \cdot \int_0^{\pi} \sin[(2l+1)\theta] \cdot \sin[(2k+1)\theta] d\theta$$

L'intégrale $\int_0^{\pi} \sin[(2l+1)\theta] \cdot \sin[(2k+1)\theta] d\theta$ est nulle sauf si $k = l$ auquel cas elle vaut $\pi/2$.

Donc

$$D = (\pi/8) \cdot \rho \cdot \Gamma_0^2 \sum_{k=0}^{k=\infty} (2k+1) \cdot a_k^2 \quad (21)$$

La traînée est toujours positive (impossible de faire une aile naturellement propulsive en écoulement stationnaire !).

Elle est minimale si dans la somme on se limite au premier terme $k = 0$:

$$D = (\pi/8) \cdot \rho \cdot \Gamma_0^2 \cdot a_0^2 \quad (22)$$

Dans ces conditions on a (éq. (19)) :

$g(\theta) = a_0 \cdot \sin(\theta)$, ou en revenant à la variable physique $Z = -\cos(\theta)$ on a :

$$\Gamma(Z) = \Gamma_0 \cdot a_0 \cdot \sqrt{1 - Z^2} . \quad (23)$$

La traînée est minimale si la variation de Γ en fonction de l'envergure Z a l'allure d'une ellipse.

La portance sur l'élément d'envergure dZ_0 est donnée par l'équation (14)

$$dL(Z_0) = \rho \cdot A/2 \cdot dZ_0 \cdot U_\infty \cdot \Gamma(Z_0)$$

qui donne, en remplaçant $\Gamma(Z_0)$ par sa valeur donnée par l'équation (23) :

$$dL(Z_0) = \frac{1}{2} \rho \cdot U_\infty \cdot A \cdot \Gamma_0 \cdot a_0 \cdot \sqrt{1 - Z_0^2} dZ_0$$

et en intégrant de -1 à 1 on obtient :

$$L = \frac{1}{2} \rho \cdot U_\infty \cdot A \cdot \Gamma_0 \cdot a_0 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - Z_0^2} dZ_0 = \frac{\pi}{4} \rho \cdot U_\infty \cdot A \cdot \Gamma_0 \cdot a_0 \cdot \quad (24)$$

4.2 Détermination des portance et traînée.

Dans (22), (23) et (24) la valeur de a_0 est indéterminée.

La distribution de Γ sur l'aile, la portance L et la traînée D ne sont connues qu'à un facteur a_0 près.

C'est l'équation de couplage (9) qui permet de déterminer ce facteur a_0 . Elle s'écrit en remplaçant la variable d'espace z_0 par Z :

$$\Gamma(Z) = \pi \cdot c(Z) \cdot U_\infty \cdot [\alpha(Z) - V(Z)/U_\infty]. \quad (9')$$

Cette valeur de a_0 va dépendre de la forme en plan de l'aile (par $c(Z)$) et du vrillage (par $\alpha(Z)$).

En remplaçant dans (9') $V(Z)$ par $V(Z) = (\Gamma_0/2\pi A) \cdot G(Z)$ (équation (12)) et $\Gamma(Z)$ par $\Gamma(Z) = \Gamma_0 \cdot g(Z)$ (équation (10)) on obtient :

$$\Gamma_0 \cdot g(Z) = \pi \cdot c(Z) \cdot U_\infty \cdot \alpha(Z) - [c(Z)/2A] \cdot \Gamma_0 \cdot G(Z). \quad (25)$$

Pour le cas de traînée minimale on se limite au premier terme ($k=0$) des développements (19) de "g" et (20) de "G" :

$$g(\theta) = a_0 \cdot \sin(\theta) \text{ donne } g(Z) = a_0 \cdot (1 - Z^2)^{1/2}, \text{ et } G(\theta) = \pi \cdot a_0 = G(Z).$$

L'équation (25) devient :

$$\Gamma_0 \cdot a_0 \cdot (1 - Z^2)^{1/2} = \pi \cdot c(Z) \cdot U_\infty \cdot \alpha(Z) - [c(Z)/2A] \cdot \Gamma_0 \cdot \pi \cdot a_0.$$

Si l'aile n'est pas vrillée $\alpha(Z) = \alpha_0$ et comme $\Gamma_0 = \pi \cdot c_0 \cdot U_\infty \cdot \alpha_0$ on obtient :

$$a_0 \cdot (1 - Z^2)^{1/2} = [c(Z)/c_0] \cdot (1 - \pi \cdot a_0 \cdot c_0 / 2A).$$

Pour que cette relation soit satisfaite il faut que :

- $c(Z)/c_0 = (1 - Z^2)^{1/2}$ c'est à dire que la forme en plan ("planform" en anglais) soit elliptique,

et

- $a_0 = 1/[1 + (\pi \cdot c_0 / 2A)]$.

Le problème est ainsi complètement résolu :

Considérons une aile non vrillée (d'envergure A et de corde c_0 dans le plan de symétrie $z=0$).

Sa traînée induite sera minimale si :

1- la corde varie de façon elliptique en fonction de l'envergure :

$$c(Z) = c_0 \cdot (1-Z^2)^{1/2}. \quad (26)$$

2- sa surface est alors

$$S = \pi A \cdot c_0 / 4. \quad (27)$$

(au lieu de $S=A \cdot c_0$ pour une aile rectangulaire).

3- son coefficient de portance C_L déduit de (24) et de S ci-dessus est :

$$C_L = \alpha_0 \cdot 2 \cdot \pi / [1 + (\pi c_0 / 2A)] \quad (28)$$

(au lieu de $\alpha_0 \cdot 2 \cdot \pi$ en "2D").

4- son coefficient de traînée induite minimal C_D déduit de (21) et de S est :

$$C_D = \alpha_0^2 \cdot \pi \cdot (c_0/A) / [1 + (\pi c_0 / 2A)]^2 \text{ ou encore } C_D = C_L^2 / (\pi \cdot A) \quad (29)$$

où $\Lambda = A^2/S$ est l'allongement de l'aile (A envergure, S surface de l'aile).

A cette traînée induite il faut ajouter le traînée de frottement C_{DF} due à la viscosité négligée ici.

Le coefficient de traînée total est donc en réalité $C_{DT} = C_{DF} + C_L^2 / (\pi \cdot \Lambda)$.

La finesse réelle F de l'aile est $F = C_L / C_{DT} = C_L / [C_{DF} + C_L^2 / (\pi \cdot \Lambda)]$.

La finesse F est maximale pour $dF/dC_L = 0$, soit pour un coefficient de portance optimal

$$C_{Lopt} = \sqrt{\pi \Lambda C_{DF}} \quad \text{d'où une finesse maximale}$$

$$F_{opt} = 1/2 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot \Lambda}{C_{DF}}} \quad (30)$$

qui augmente si l'allongement Λ augmente et si le frottement C_{DF} diminue.

5. Et en pratique ?

- 5.1 L'aile elliptique.

L'application pratique de cette théorie est visible puisque la plupart des avions étudiés dans les années 1930-1940 (et même plus tard) ont une aile elliptique : transport DC3, bombardier B17, chasseurs Spitfire, P51, etc.

La figure 3 montre que l'aile du Supermarine Spitfire Mk1 est elliptique.

En effet la surface qui vient se superposer à la silhouette de l'avion est une aile :

- de corde $c_0 = 0.22.A$ (A étant l'envergure) avec $c = c_0.(1-Z^2)^{1/2}$.
- ayant une légère flèche inverse puisque le point situé à la demi corde se situe vers l'avant à $X = x/(A/2) = 0.055*Z$.

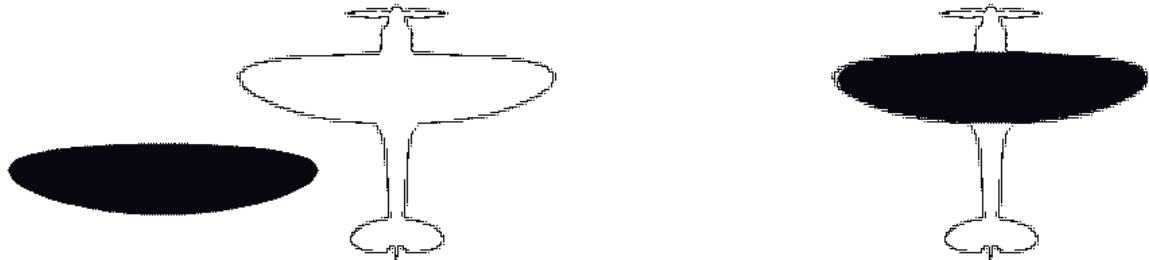


Figure 3 : L'aile elliptique se superpose à la silhouette du Spitfire.

La force de portance L produite par une aile elliptique d'envergure A et de corde c_0 est donnée par le produit de C_L (eq. 28) par S (eq. 27) et $1/2\rho.U_\infty^2$ soit :

$$L = 1/2\rho.U_\infty^2 . \pi.A.c_0/4.\alpha_0 . 2.\pi / [1 + (\pi.c_0/2A)]$$

$$= 1/2\rho.U_\infty^2 . A.c_0. 2\pi.\alpha_0. \{ \pi.c_0/[4.(1 + \pi.c_0/2A)] \}$$

Soit grosso modo le tiers de la portance calculée en « 2D » pour une aile rectangulaire.

- 5.2 Tourbillons (turbulence) de sillage.

Pour une aile elliptique, des tourbillons de sillage sont émis continûment tout le long du bord de fuite. S'il y a des variations brusques de la portance en envergure, par exemple s'il y a localement un déploiement de volets ou de becs pour augmenter la portance, il y aura un tourbillon intense émis dans le sillage.

On a vu que les tourbillons du sillage induisaient une vitesse vers le bas sur l'aile (« downwash »). On n'a pas tenu compte du fait que ces tourbillons induisaient aussi une vitesse sur les particules fluides du sillage lui-même et on a considéré pour simplifier que le sillage est plan.

Ce n'est pas le cas et la surface du sillage a une forme concave qu'on peut calculer (voir chapitre 5) qui descend derrière l'aile.

De plus les tourbillons (qui sont plus ou moins répartis sur toute l'envergure près du bord de fuite de l'aile) se rassemblent (à une certaine distance en aval de l'aile) pour former deux tourbillons contrarotatifs intenses schématisés figure 4. En effet leur intensité est voisine de la circulation maximale autour du profil de l'aile c'est à dire $\Gamma_0 = \pi.c_0.U_\infty.\alpha_0$.

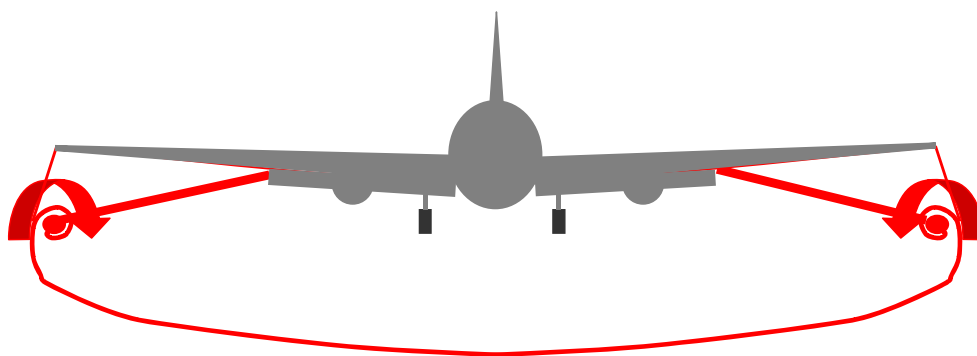


Figure 4 : tourbillons contrarotatifs de sillage Γ_0 vus de l'arrière.

Ces tourbillons sont très dangereux pour ce qui vole dans leur voisinage. C'est ce qu'on appelle « turbulence de sillage ».

La portance L est proportionnelle au produit de l'envergure A , de la circulation Γ_0 et de la vitesse U_∞ . La portance équilibre le poids P de l'avion et on a donc:

$$P = Cte.A.U_\infty.\Gamma_0 \quad (\text{où } Cte \text{ est une constante qui dépend de la forme de l'aile}).$$

Les conditions de vol de tous les avions de ligne étant pratiquement les mêmes, on en déduit que l'intensité des tourbillons de sillage augmente si U_∞ diminue. C'est donc au décollage et en approche qu'ils sont les plus dangereux.

De plus, pour une vitesse donnée, on voit que Γ_0 est proportionnel au poids P divisée par l'envergure A .

Des exemples:

- A380 : MTOW 560 tonnes, envergure 80 m $P/A = 7 \text{ t/m}$.

- B747 : MTOW 412 tonnes, envergure 64 m $P/A = 6.44 \text{ t/m}$.

- Fokker 100 : MTOW 43 tonnes, envergure 29 m $P/A = 1.5 \text{ t/m}$

- Avion léger d'aéroclub : 1 tonne $A = 8\text{m}$ $P/A = 0.125 \text{ t/m}$.
(mais la vitesse d'approche est plus faible !).

D'où le classement des avions en différentes catégories de turbulence de sillage.

- 5.3 Planeurs.

Pour obtenir la meilleure finesse optimale $F_{\text{opt}} = 1/2 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot \Lambda}{C_{\text{DF}}}}$ (eq. 30) on doit augmenter

l'allongement Λ et diminuer la traînée de frottement C_{DF} . Les planeurs ont donc des ailes de grand allongement avec un profil laminaire bien poli.

La théorie de Prandtl est encore utilisée pour des calculs simples d'hélice ou de rotor d'hélicoptère sous le nom de "théorie des éléments de pale" en supposant le sillage non pas plan comme dans le cas de l'aile mais hélicoïdal.

Rappelons qu'il s'agit d'un calcul approché qui utilise "localement" les résultats de la théorie des écoulements bidimensionnels (2D) incompressibles.

Cette approximation n'est plus acceptable si l'aile est fortement tridimensionnelle, c'est à dire s'il y a une forte flèche ou du dévers (cas de winglets par exemple).

La théorie générale des écoulements à potentiel de vitesse (éventuellement compressibles et instationnaires) présentée au chapitre 5 permet de s'affranchir de ces restrictions.