3+ LE POTENTIEL COMPLEXE : ORIGINE, INTÉRÊT.

Au chapitre 3 on a utilisé le potentiel complexe et la transformation conforme sans vraiment examiner l'origine de cette idée ni les avantages de ce concept. On tente de répondre ici à ces questions.

1 - Potentiel scalaire et potentiel vecteur

D'une manière générale le champ de vitesse **U** (x, y, z) **(**de composantes u, v, w selon les axes Ox et Oy et Oz) dérive d'un potentiel scalaire φ (x,y,z) et d'un potentiel vecteur **A**(x,y,z) :

$$\mathbf{U} = \mathbf{grad}(\varphi) + \mathbf{rot}(\mathbf{A}) \qquad (1)$$

En notant **ω** le rotationnel de la vitesse on a donc pour l'écoulement le plus général :

$$\mathrm{div}(\mathbf{U}) = \mathrm{div}(\mathbf{grad}(\varphi)) = \Delta\varphi = q$$
$$\mathbf{rot}(\mathbf{U}) = \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{U})) = -\,\mathbf{\Delta A} = \boldsymbol{\omega}$$

Δφ est le Laplacien de φ :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = q\,(x, y) \qquad (2)$$

ΔA est le Laplacien vectoriel de **A** (A_x, A_y, A_z) :
Pour chacune des composantes de **A**, pour A_x par exemple, on a :

$$\Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} = -\,\omega_x\,(x, y)\,. \qquad (3)$$

"q" représente les effets de la compressibilité et "**ω"** les effets de la rotation.

Or on démontre que pour un fluide parfait la circulation de la vitesse sur un contour fermé constitué de particules fluides reste constante au cours du temps (théorème de Thomson).
On en déduit que si l'écoulement est uniforme à l'infini amont, la circulation de la vitesse est nulle sur n'importe quel circuit et donc **rot** (**U**) est nul partout. Notons que le circuit fermé est constitué de particules fluides (il se déforme au cours du mouvement) et qu'il ne peut couper les surfaces des corps plongés dans le fluide ni les éventuels sillages.

Donc si l'écoulement est non rotationnel à l'amont d'un profil, **ω** = 0 (presque partout).

Si l'écoulement est incompressible q = 0.

Pour un écoulement bi-dimensionnel, **U,** q**, ω** ne dépendent que des coordonnées x et y.

ω est un vecteur perpendiculaire au plan Oxy ainsi que **A.** On peut écrire **A** = ψ.**k**, "**k"** étant le vecteur unitaire de l'axe Oz perpendiculaire au plan Oxy.

Les composantes u et v de **U** s'écrivent, avec (1) :

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (4)$$

Pour un écoulement incompressible et non rotationnel (q = 0, **ω** = 0) φ et ψ vérifient les équations de Laplace $\Delta\varphi = 0$ (2) et $\Delta\psi=0$ (3).
Ces équations caractérisent un "type" d'écoulement, mais ce sont les conditions "aux limites" (à l'infini et sur tout corps plongé dans l'écoulement) qui définissent l'écoulement (vitesse, pression…).

2 - Variables complexes et potentiel complexe

Au lieu des variables indépendantes x et y, introduisons les variables complexes **z** et **z*** :
z = x **+ i**.y, **z* =** x **- i**.y avec i = √-1 (ou **i**² = -1).
On note en gras les nombres complexes et **z*** est le nombre complexe conjugué de **z**.
On a :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*}\right).$$

En remplaçant $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ dans les expressions (4) de u et v on obtient :

$$u = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\varphi)}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial(\varphi)}{\partial \mathbf{z}^*} + \mathbf{i}\frac{\partial(\psi)}{\partial \mathbf{z}} - \mathbf{i}\frac{\partial(.\psi)}{\partial \mathbf{z}^*}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\varphi + \mathbf{i}.\psi)}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial(\varphi - \mathbf{i}.\psi)}{\partial \mathbf{z}^*}\right]$$

En notant **F(z)** = φ + **i**.ψ (c'est la fonction potentiel complexe) on a :

$$u = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\varphi + \mathbf{i}.\psi)}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial(\varphi - \mathbf{i}.\psi)}{\partial \mathbf{z}^*}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \mathbf{z}^*}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{dF}}{\mathbf{dz}} + \left(\frac{\mathbf{dF}}{\mathbf{dz}}\right)^*\right] = \Re(\mathbf{dF/dz})$$

où ℜ( ) est la partie réelle du nombre complexe ( ).

En faisant de même pour v on obtient :

$$v = \frac{1}{2}\left[\mathbf{i}\frac{\partial(\varphi)}{\partial \mathbf{z}} - \mathbf{i}\frac{\partial(\varphi)}{\partial \mathbf{z}^*} - \frac{\partial(\psi)}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial(\psi)}{\partial \mathbf{z}^*}\right] = \frac{\mathbf{i}}{2}\left[\frac{\partial(\varphi + \mathbf{i}.\psi)}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial(\varphi - \mathbf{i}.\psi)}{\partial \mathbf{z}^*}\right]$$

$$v = \frac{\mathbf{i}}{2}\left[\frac{\mathbf{dF}}{\mathbf{dz}} - \left(\frac{\mathbf{dF}}{\mathbf{dz}}\right)^*\right] = -\Im(\mathbf{dF/dz})$$

où ℑ( ) est la partie imaginaire du nombre complexe ( ).

On a donc :
dF/dz = **w** = u **- i**.v où la fonction potentiel complexe est **F(z)** = φ + **i**.ψ.

Le nombre complexe qui représente le vecteur vitesse est **w*** = u + **i**.v, complexe conjugué de **w**.

3 - Singularités : source, tourbillon, doublet.

Parmi toutes les fonctions f (x,y) vérifiant l'équation de Laplace $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, il en est deux spécialement intéressantes :

$f_1(x,y) = (1/4\pi).\mathrm{Ln}\,(x^2+y^2) = (1/2\pi).\mathrm{Ln}(r)$

où Ln est le logarithme naturel et "r" est la distance du point M(x,y) à l'origine des coordonnées O.

$f_2(x,y) = (1/2\pi).\text{arctg}(y/x)$
c'est l'angle entre l'axe Ox et le vecteur **OM**.

Le champ de vitesse associé au potentiel $\varphi = f_1(x,y)$ est $u = (1/2\pi).x/r^2$, $v = (1/2\pi).y/r^2$.
La vitesse en un point M est donc parallèle à **OM** (vitesse radiale) et son intensité $U=1/(2\pi r)$ ne dépend que de r et décroît en 1/r.
Le ***débit*** à travers un cercle de rayon r est $Q = 2\pi.r.U = 1$.
C'est le champ de vitesse d'une ***source*** placée à l'origine O et d'intensité Q = 1.

Le champ de vitesse associé au potentiel $\varphi = f_2(x,y)$ est $u = -(1/2\pi).y/r^2$ et $v = (1/2\pi).x/r^2$.
La vitesse en un point M est donc perpendiculaire à **OM** (la vitesse est tangentielle) et son intensité $U=1/2\pi r$ ne dépend que de r et décroît en 1/r.
La ***circulation*** de la vitesse sur un cercle de rayon r est $\Gamma = 2\pi.r.U = 1$.
C'est le champ d'un ***tourbillon*** d'intensité 1 placé à l'origine.

En combinant les deux fonctions f_1 et f_2 pour créer la fonction complexe $\mathbf{F}(x,y) = f_1 + \mathbf{i}.f_2$ on obtient :
$\mathbf{F_S}(x,y) = \mathbf{F_S}(\mathbf{z}) = \varphi + \mathbf{i}.\psi = (1/2\pi).\mathbf{Ln}(\mathbf{z})$ avec $\varphi = f_1$ et $\psi = f_2$ ($\mathbf{Ln}(\mathbf{z})$ est le logarithme complexe du nombre complexe **z**).
φ est le potentiel d'une source d'intensité 1 et ***ψ est la fonction de courant*** du champ de vitesse produit par cette source. F_S est le potentiel complexe d'une source d'intensité 1 placée à l'origine O.

Le potentiel complexe $\mathbf{F_\Gamma}(x,y) = \mathbf{F_\Gamma}(\mathbf{z}) = -f_2 + \mathbf{i}.f_1 = \mathbf{i}.(f_1 + i.f_2) = (\mathbf{i}/2\pi).\text{Ln}(\mathbf{z})$ est le potentiel complexe d'un tourbillon d'intensité 1 placé à l'origine O.

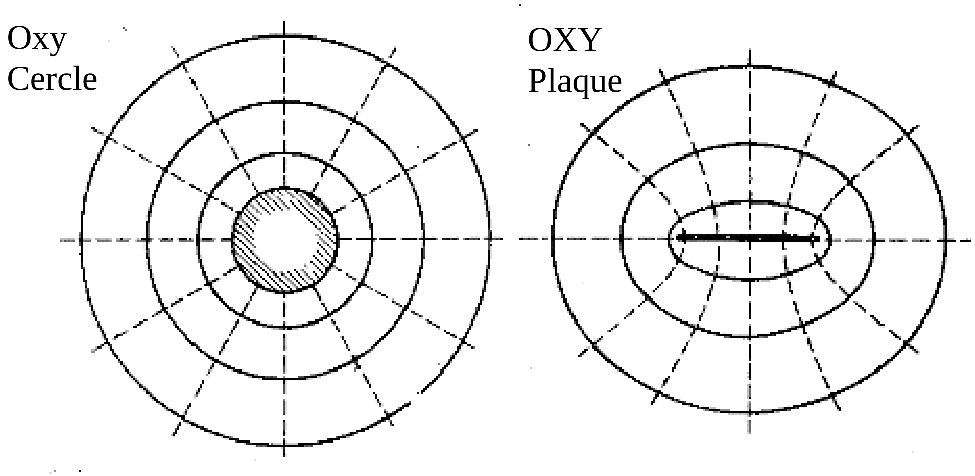

Figure 1 : Lignes de courant et équipotentielle.

Sur la figure 1 (qui est la figure 2 du chapitre 3) on peut voir à gauche "les rayons" comme les lignes de courant ψ = Constante (parallèles à **U** en tout point) et "les cercles" comme les courbes équipotentiel φ = Constante de l'écoulement produit par une source placée au centre O.

A droite on voit ce que deviennent ces courbes après une transformation conforme du cercle en un segment (plaque plane infiniment mince).

Réciproquement, on peut aussi voir les cercles comme les lignes de courant et les rayons comme les équipotentielles de l'écoulement produit par un tourbillon placé en O.

La vitesse créée (on dit aussi induite) par une source ou un tourbillon décroît comme1/r avec la distance r.

Un autre type de singularité consiste en un ensemble de deux sources égales et de signe contraire (débit total nul) très voisines, c'est un ***doublet ou dipôle***. L'effet dépend de l'intensité et de la direction d'alignement des deux sources. Le potentiel complexe d'un doublet est de la forme $\mathbf{F}_{\mu}(\mathbf{z}) = \mu/\mathbf{z}$, μ étant un nombre complexe défini par l'intensité et l'orientation du doublet μ.

La vitesse induite par un doublet décroît comme1/r² avec la distance r.

On appelle ces sources, tourbillons, doublets localisés des ***singularités***.
Si source ou tourbillons ne sont pas placés à l'origine O des coordonnées x, y mais en x_S, y_S, il suffit de remplacer $\mathbf{z}$ par $\mathbf{z} - \mathbf{z}_S$.

On rappelle que le potentiel complexe d'un champ de vitesse uniforme faisant l'angle α avec l'axe OX est $\mathbf{F}_{\alpha}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}.\exp-(i.\alpha)$.
Le potentiel complexe d'un écoulement produit par une distribution de sources (localisées en $\mathbf{z}_i$ d'intensité Q_i), de tourbillons (localisés en $\mathbf{z}_j$ d'intensité Γ_j) et de doublets (localisés en $\mathbf{z}_k$ d'intensité μ_k) avec une vitesse à l'infini faisant l'angle α avec l'axe Ox est donc :

$$F(z) = \mathbf{z}.\exp-(i.\alpha) + Q_i/2\pi.\ \mathrm{Ln}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_i) + \mathbf{i}.\ \Gamma_j/2\pi.\ \mathrm{Ln}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_j) + \mu_k/(\mathbf{z} - \mathbf{z}_k)$$

On peut combiner source Q_i et tourbillon Γ_i pour former une source "complexe" σ_i et le potentiel s'écrit :

$$F(z) = \mathbf{z}.\exp-(i.\alpha) + \sigma_i/2\pi.\ \mathrm{Ln}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_i) + \mu_k/(\mathbf{z} - \mathbf{z}_k).$$

Les singularités $\sigma_i(\mathbf{z}_i)$ et $\mu_k(\mathbf{z}_k)$ doivent être déterminées de manière à satisfaire les conditions aux limites (vitesse tangente en tout point d'un cercle ou d'un profil d'aile par exemple).
Pour l'écoulement avec l'incidence α autour du cylindre de rayon R=1 centré en O, il faut placer un doublet $\mu = \exp(\mathbf{i}.\alpha)$ en O pour que la vitesse sur le cercle soit tangente au cercle. Le cercle est une ligne de courant ($\psi = 0$).

Au chapitre 5 (cas général 3D) on montre comment la formule de Green permet d'introduire de façon plus "naturelle" source et doublet.

4 - Quel intérêt ?

Plaçons nous dans le plan Oxy (du cercle par exemple). Imaginons que div(**U**) = q est nul partout sauf sur un disque centré en O de rayon très petit ε.
Le flux de la vitesse radiale à travers un cercle de rayon $r > \varepsilon$ c'est à dire le débit Q est :

$Q = q.\pi.\varepsilon^2$. Si le rayon de la source de débit $\varepsilon \to 0$ et que $q = 1/\pi\varepsilon^2 \to \infty$, on a une source ponctuelle de débit Q = 1 centrée en x = 0, y = 0 dont le potentiel est
$\varphi = f_1(x,y) = 1./2\pi .Ln (r)$.
C'est le potentiel d'une source ponctuelle de débit 1 placée en O.

De la même manière imaginons que **rot**(**U**) = **ω** est nul partout sauf sur un disque centré en O de rayon très petit ε. La circulation de la vitesse tangentielle sur un cercle de rayon r > ε, c'est à dire le tourbillon Γ, est :
$\Gamma = \omega.\pi.\varepsilon^2$, ω étant le module du vecteur $\boldsymbol{\omega} = \omega.\mathbf{k}$ perpendiculaire au plan Oxy.
Si le rayon de la zone "rotationnelle" $\varepsilon \to 0$ et que $\omega = 1/\pi\varepsilon^2 \to \infty$, on a un tourbillon d'intensité Γ = 1 ponctuel centré en x = 0, y = 0 dont le potentiel est
$\varphi = f_2(x,y) = 1./2\pi. \text{arctg}(y/x)$.

Le potentiel est défini partout sauf si x ou y → 0.

Admettons donc que dans le plan Oxy on a des régions "ponctuelles " où q et ω ne sont pas nuls ce qui donne une distribution de singularités Q et Γ.

On a pour le potentiel scalaire φ (x, y) par exemple :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = q(x,y) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathbf{z}\partial \mathbf{z}^*}$$

Par une transformation conforme **Z** = **g**(**z**), ce plan Oxy (le plan du cercle par exemple) devient un plan OXY (le plan du profil par exemple).

Dans le plan OXY, pour que le potentiel φ (X, Y) en un point X, Y du plan OXY soit le même qu'au point correspondant (x, y) du plan Oxy on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathbf{Z}\partial \mathbf{Z}^*} = \frac{1}{|\mathbf{g}'^2|}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathbf{z}\partial \mathbf{z}^*} = \frac{1}{|\mathbf{g}'^2|}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right] = \frac{1}{|\mathbf{g}'^2|}q(x,y)\,.$$

.
Dans ce cas, la source $Q_{XY}(X, Y)$ dans le plan OXY doit être :

$$Q_{XY}(X,Y) = \iint_E \frac{1}{|\mathbf{g}'^2|} q(x,y)dXdY = \iint_\varepsilon \frac{1}{|\mathbf{g}'^2|} q(x,y)|\mathbf{g}'^2|dxdy = Q(x,y)$$

où le domaine d'intégration E du plan OXY correspond au disque de rayon ε → 0 centré en O du plan Oxy.
On trouve donc que si $Q_{XY}(X,Y) = Q(x,y)$ alors φ (X,Y) = φ (x,y).
Le même raisonnement pour la fonction ψ (les tourbillons) permet d'affirmer :

Des sources Q_{XY} (X,Y) (ou tourbillons) placées aux points Z = g(z) du plan transformé OXY de même intensité que des sources Q(x,y) (ou tourbillons) du plan Oxy placées en z produisent donc le même potentiel complexe : F(Z) = F(z).

C'est là tout l'intérêt de la transformation conforme et de la théorie des singularités pour l'étude des écoulements bidimensionnels incompressibles :
Si on connaît une distribution de singularités qui permet de satisfaire les conditions aux limites pour une géométrie simple on connaît le potentiel complexe (et la vitesse) pour cette géométrie (le cercle par exemple), alors on connaît aussi le potentiel complexe (et le champ de vitesse) pour une géométrie plus compliquée (un profil d'aile par exemple) obtenue par transformation conforme de la géométrie "simple".

Pour en savoir plus sur la méthode des singularités une excellente référence :
Dans la collection Aérodynamique, "Méthode des singularités" de J. Bousquet, Cépadues Editions.